S A Y
ie A

THESES

PRESENTEES

A L ' UNIVERSITE PARIS SUD

CENTRE D ' ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES MATHEMATIQUES

PAR

Alain YGER

#

1ère thèse FONCTIONS MOYENNE-PERIODIQUES DE DEUX VARIABLES ET SYSTEMES D'EQUATIONS DIFFERENCE-DIFFERENTIELLES

2ème thèse PROPOSITIONS DONNEES PAR L'UNIVERSITE

#

Soutenues le 4 Mars 1982 devant la Commission d'Examen

MM. L. SCHWARTZ — Président

C.A. BERENSTEIN
R. GAY
Y. MEYER
M. WALDSCHMIDT
— Examinateurs

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543515_0014

R S A Y
érie A

THESES

PRESENTEES

A L ' UNIVERSITE PARIS SUD

CENTRE D ' ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES MATHEMATIQUES

PAR

Alain YGER

#

1ère thèse FONCTIONS MOYENNE-PERIODIQUES DE DEUX VARIABLES ET SYSTEMES D'EQUATIONS DIFFERENCE-DIFFERENTIELLES

2ème thèse PROPOSITIONS DONNEES PAR L'UNIVERSITE

#

Soutenues le 4 Mars 1982 devant la Commission d'Examen

MM. L. SCHWARTZ — Président

C.A. BERENSTEIN
R. GAY
Y. MEYER
M. WALDSCHMIDT
} Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

A mes parents

A Françoise et à Pierre

C'est à Yves Meyer que je dois mon initiation à la recherche en Mathématiques ; c'est à sa constante disponibilité, à la manière si vivante qu'il a d'exposer, aux encouragements qu'il m'a prodigués, que je dois une bonne part, pour ne pas dire tout, de ma passion pour ce travail.

Le Professeur Laurent Schwartz m'a accueilli au Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, me permettant ainsi de poursuivre ma recherche; c'est pour moi à la fois un honneur et une joie que de le remercier pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

Comment ne pas remercier tous ceux qu'autour de moi, tant au Centre de Mathématiques de l'Ecole qu'au sein de l'équipe d'Analyse Complexe d'Orsay, j'ai pu ennuyer avec mes questions souvent naïves ; je pense à toute l'équipe GAGA et en particulier à Marc Giusti, à Michel Merle et à Jean-Pierre Henry, à Patrice Philippon, à Gilles Pisier, à Nessim Sibony et à bien d'autres.

Je ne dirais jamais assez combien les longues heures de travail en commun avec Carlos Berenstein m'ont apporté tant sur le plan mathématique qu'humain ; je pense à la patience qu'il lui fallait bien souvent déployer pour comprendre ou simplifier des raisonnements bien souvent embrouillés.

Roger Gay a eu la lourde mission de lire en détail ce travail ; en acceptant de se faire le "piéton" des mathématiques, il m'a fait une quantité d'observations qui m'ont conduit - et je voudrais l'en remercier - à modifier la rédaction de cette thèse afin de la rendre - du moins je l'espère - plus lisible qu'elle ne l'était au premier abord.

Michel Waldschmidt, enfin, m'a proposé un passionnant sujet de seconde thèse, m'invitant ainsi à approfondir mes connaissances, jusque là superficielles, en théorie des nombres.

Sans l'effort du secrétariat de l'Ecole, cette thèse n'aurait pas vu le jour ; je voudrais ici remercier tout le monde, et plus particulièrement Claudine Harmide qui a eu le soin et la patience de taper, et de retaper, ces pages couvertes de formules bien souvent illisibles. Dominique Concha en a assuré le tirage et je voudrai aussi le féliciter pour son soin et sa diligence.

Aux moments de satisfaction, succèdent bien souvent dans la recherche les longues périodes de doute, où l'on est là en étant bien souvent ailleurs ; je voudrais tant que Françoise me pardonne ces moments là ; sans le climat dont elle a su m'entourer et la patience dont elle a constamment fait preuve, ce travail aurait-il pu être mené à bien ?

TABLE DES MATIERES

Chapitre I.

Introduction et références bibliographiques

Chapitre II.

Fonctions moyenne-périodiques de deux variables étude de systèmes d'équations de convolution

Chapitre III.

Fonctions définies dans le plan et vérifiant certaines propriétés de moyenne

Chapitre IV.

Sur les couples de distributions a support fini dans $\mathbb{R}^2$ et à spectre discret

Chapitre V.

Systèmes d'exponentielles polynomes et synthèse spectrale

C H A P I T R E I

INTRODUCTION ET REFRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

I N T R O D U C T I O N

Un problème longtemps ouvert de la théorie des fonctions moyenne-périodiques de n variables (lorsque $n > 1$) était le suivant :

" étant données M distributions $(\mu_i)_{i=1}^{M}$ à support compact dans $\mathbb{R}^n$, les solutions élémentaires du système $\mu_1 * \check{f} = \ldots = \mu_M * \check{f} = 0$ forment-elles une partie totale dans l'espace des solutions indéfiniment dérivables de ce même système ? " (une solution élémentaire est par définition une solution de la forme $P(x_1,\ldots,x_n)\exp(i(\alpha_1 x_1+\ldots+\alpha_n x_n))$ où P est un élément de $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$, $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ un n-uplet de $\mathbb{C}^n$; on note d'autre part $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\check{f}(X)=f(-X)$).

Ce problème, dit problème de la synthèse spectrale, a été résolu positivement par Schwartz, dans le cas où $n = 1$ et où M est quelconque (non publié, voir aussi [13]) ; dans sa thèse, en 1955 [14], Malgrange prouve le résultat lorsque $n > 1$ et $M = 1$; dans les années 1969-1970, Ehrenpreis [7] et Palamodov [17], ont donné une réponse positive au problème lorsque les distributions μ_i sont à support l'origine, ce qui revient à dire que la variété de $\mathbb{C}^n$ définie comme $\{Z \in \mathbb{C}^n, \hat{\mu}_i(Z) = 0, i = 1,\ldots,M\}$ est algébrique (voir également [3], chapitre 8) ; en fait ce que l'on convient d'appeler le "principe fondamental" d'Ehrenpreis fournit un résultat plus précis, mais nous y reviendrons dans cette introduction à la lumière de travaux plus récents ([1], [19]).

Le problème de la synthèse spectrale se ramène à un problème de division: désignons par $E'(\mathbb{C}^n)$ l'anneau des fonctions entières transformées de Fourier de distributions à support compact dans $\mathbb{R}^n$; prouver la synthèse spectrale pour le système d'équations $\mu_1 * \check{f} = \ldots = \mu_M * \check{f} = 0$, où $\mu_1,\ldots,\mu_M$ sont des éléments de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, revient à prouver que tout élément de $E'(\mathbb{C}^n)$ appartenant localement à l'idéal de $A(\mathbb{C}^n)$ engendré par $\hat{\mu}_1,\ldots,\hat{\mu}_M$ est en fait dans l'adhérence dans $E'(\mathbb{C}^n)$ de l'idéal de $E'(\mathbb{C}^n)$ engendré par les mêmes éléments $\hat{\mu}_1,\ldots,\hat{\mu}_M$ (pour une démons-

tration de ces résultats, voir par exemple [4], proposition 2.4,2.5).

En 1975, D.I. Gurevich, dans [8], construisit un couple (f_1, f_2) d'éléments de $E'(\mathbb{C}^2)$ tel que l'adhérence dans $E'(\mathbb{C}^2)$ de l'idéal de $E'(\mathbb{C}^2)$ engendré par f_1 et f_2 soit incluse strictement dans l'idéal de $E'(\mathbb{C}^2)$ constitué des éléments de $E'(\mathbb{C}^2)$ appartenant localement à l'idéal de $A(\mathbb{C}^2)$ engendré par f_1 et f_2 ; Gurevic construisit également 6 éléments $(\hat{\tau}_1,\ldots,\hat{\tau}_6)$ de $E'(\mathbb{C}^2)$ tels que le système d'équations $\tau_1 * \check{f} = \ldots = \tau_6 * \check{f}$ ne possède pas la propriété de la synthèse spectrale et qu'en plus $\{Z \in \mathbb{C}^2,\ \hat{\tau}_1(Z) = \ldots = \hat{\tau}_6(Z) = 0\} = \emptyset$.

C'est dans un article de J. Delsarte [5] que se situe l'origine de ce travail ; le résultat de Delsarte est un résultat en apparence très particulier concernant les fonctions moyenne-périodiques de deux variables : soient $\delta(0,0)$, $\delta(1,0)$, $\delta(0,1)$ et $\delta(1,1)$ les masses unités placées aux points (0,0), (1,0), (0,1) et (1,1) de $\mathbb{R}^2$; soit C le carré $[0,1] \times [0,1]$, et φ_1 et φ_2 deux fonctions de $L^1(\mathbb{R}^2)$ nulles hors de C ; enfin a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2 sont huit nombres complexes tels que les mineurs $c_1 d_2 - c_2 d_1$, $b_1 d_2 - b_2 d_1$, $a_1 b_2 - a_2 b_1$, $a_1 c_2 - a_2 c_1$ soient tous non nuls ; on pose

$$\mu_j = a_j\, \delta(0,0) + b_j\, \delta(1,0) + c_j\, \delta(0,1) + d_j\, \delta(1,1) + \varphi_j\, dx\, dy \quad (j=1,2);$$

Delsarte montre que si $\{Z \in \mathbb{C}^2,\ \hat{\mu}_j(Z) = 0,\ j = 1,2\}$ est simple, les solutions élémentaires du système $\mu_j * f = 0$, $j = 1,2$, forment une partie totale dans l'espace des solutions localement dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ de ce même système.

§ II A : Dans la partie A de "fonctions moyenne-périodiques de deux variables ; étude de systèmes d'équations de convolution envisagés par J. Delsarte" (parue dans les publications du Séminaire d'Analyse harmonique d'Orsay 1976-1977) nous avons généralisé ce résultat au cas où C est remplacé par un polygone convexe compact P non réduit à un segment dans le plan affine, où φ_1 et φ_2 sont cette fois des mesures portées par P et ne chargeant pas les côtés de ce polygone (A_2, théorème 1; voir aussi [20]) ; nous avons en fait montré, en reprenant dans ce cas particulier la démonstration du théorème fondamental de Ehrenpreis [7] et en utilisant un argument de compacité, que tout élément de $E'(\mathbb{C}^2)$

appartenant localement à l'idéal de $A(\mathbb{C}^2)$ engendré par $\hat{\mu}_1$ et $\hat{\mu}_2$, était en fait dans $\hat{\mu}_1\ E'(\mathbb{C}^2) + \hat{\mu}_2\ E'(\mathbb{C}^2)$ (IIA, théorème 2). Indépendamment de ce travail, C.A. Berenstein et B.A. Taylor ([1]) ont su tirer profit des techniques d'interpolation (du type formules de Jacobi) développées par Delsarte pour la démonstration de son résultat (pour une exposition claire de ces outils, voir aussi [1], chapitre I, et [19], chapitre II); pour les n-uplets d'éléments de $E'(\mathbb{C}^n)$ définissant une intersection complète dans $\mathbb{C}^n$ - ce qui est le cas pour l'exemple étudié par Delsarte -, ils ont introduit la définition suivante (déjà utilisée par Gurevic dans [10]) :

"$(F_1,\ldots,F_n)$ est"slowly decreasing" relativement au poids $p(Z) = \sum_{j=1}^{n} |\mathrm{Im}\ z_j| + \mathrm{Log}\ (1+ \|Z\|)$ si et seulement si il existe

$\varepsilon > 0$, $K > 0$, $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ tels que

a) les composantes connexes de $\{Z \in \mathbb{C}^n,\ \sum_{j=1}^{n} |F_j(Z)| < \varepsilon\ e^{-Kp(Z)}\}$ sont bornées ;

b) si $\mathcal{C}$ est une telle composante connexe, et si Z et Z' sont deux points de $\mathcal{C}$, on a $p(Z) \leq K_1\ p(Z') + K_2$."

L'argument de compacité (reposant sur le théorème des voisinages privilégiés de Douady) nous montre que tel est bien le cas pour le couple $(\hat{\mu}_1, \tilde{\mu}_2)$ étudié dans II.A, ce qui nous permet, comme nous l'a fait remarquer C.A. Berenstein [2], de démontrer non seulement la synthèse spectrale, mais encore un théorème de représentation analogue à celui que prouve Y. Meyer dans [15] pour les solutions du système étudié ici. Dès lors, et grâce au théorème 10.1 de Berenstein-Taylor [1] se trouvent en un sens généralisés les théorèmes de représentation que donne Meyer dans [15].

Comme nous le remarquons dans le préambule du chapitre I, les problèmes de ce type ne sont pas tout à fait aussi particuliers qu'ils pourraient le paraître : si ω est une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$, K un compact de $\mathbb{R}^2$, et $E(\omega,K)$ un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, invariant par translation, tel que :

$$\forall\ f \in E(\omega,K),\ \forall\ X \in \mathbb{R}^2,\ |f(X)| \leq \omega\ (\|X\|)\ \|f\|_K\ ,$$

il est clair, d'après le théorème de Hahn-Banach, que $E(\omega,K)$ est un

sous espace de l'espace des solutions continues d'un certain système d'équations du type envisagé dans IIA ; tous les éléments de $E(\omega,K)$ se représentent donc comme les solutions d'un tel système, pour lequel nous avons montré que le théorème 10.1 de [1] s'appliquait.

Retenons enfin que toutes les techniques utilisées dans la démonstration des théorèmes A1 et A2 reposent sur les deux particularités suivantes :

i) $\{\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2 = 0\} \subset \{Z, |\operatorname{Im} Z| < T\}$

ii) $\forall\, \chi \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{T})$, $\{(\chi\, \mu_1)\hat{} = (\chi\mu_2)\hat{} = 0\}$ est discret dans $\mathbb{C}^2$.

§ II. B : L'une des remarques essentielles faites par Y. Meyer à propos du problème étudié par Delsarte est la suivante : pour ce type de système, il existe un ouvert relativement compact D de $\mathbb{R}^2$ (à savoir le carré double $[0,2] \times [0,1]$) que l'on pourrait qualifier de "domaine fondamental" pour un tel système d'équations de convolution, au sens où tout élément f de $L^2(D)$ se prolonge de manière unique en un élément $\tilde{f}$ de $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ solution de $\mu_1 * \tilde{f} = \mu_2 * \tilde{f} = 0$, l'application qui à f associe $\tilde{f}$ étant continue de $L^2(D)$ dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$. En reprenant les méthodes utilisées par Meyer dans [16], nous étudions le comportement asymptotique des solutions du système (1) $\mu_1 * f = \mu_2 * f = 0$ (dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$), où μ_1 et μ_2 sont de la forme :

$$\mu_j = a_j\, \delta(0,0) + b_j\, \delta(1,0) + c_j\, \delta(0,1) + d_j\, \delta(1,1) + \nu_j\ ,$$

les mesures ν_j étant à support fini, inclus dans $]0,1[\times]0,1[$, les coefficients a_j, b_j, c_j, d_j vérifiant les conditions de Delsarte.

Si Γ désigne le sous-groupe de $\mathbb{R}^2$ engendré par les points de Supp $\mu_1 \cup$ Supp μ_2, $\mathcal{M}$ l'algèbre des mesures atomiques à support compact, portées par Γ, E l'espace des solutions continues du système (1), nous munissons d'une structure d'algèbre de Banach l'algèbre des opérateurs de E définis par convolution avec les mesures de $\mathcal{M}$; l'essentiel de ce paragraphe est de montrer le caractère local de cette algèbre (théorème I(B)3.9) ; les techniques sont empruntées

au calcul symbolique (principe du maximum de Hugo Rossi). Le fait que la synthèse spectrale soit satisfaite pour ce type de système est essentiel dans la démonstration de tous ces résultats.

§ III C'est précisément autour de cette notion de "domaine fondamental" attaché à un système d'équations de convolution dans $\mathbb{R}^n$ qui s'articule la troisième partie de ce travail.

Si $\mu_1,\ldots,\mu_M$ désignent M mesures à support compact dans $\mathbb{R}^n$, une condition nécessaire pour que le système d'équations de convolution

$$\mu_1 * f = \ldots = \mu_M * f = 0,\ f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \tag{2}$$

admette, au sens où nous l'avons défini précédemment, un "domaine fondamental" est que le spectre du système (i.e $\{Z \in \mathbb{C}^n,\ \hat{\mu}_j(Z)=0, j=1,..,M\}$) soit inclus dans une bande de $\mathbb{C}^n$ de la forme : $|\mathrm{Im}\ Z| = \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{Im}\ z_i| \leq T$; en revanche, la recherche de conditions suffisantes pour qu'un tel domaine existe semble un problème très difficile (comme en témoigne l'exemple des systèmes étudiés au §II-A, lorsque le carré de Delsarte dans le plan affine est remplacé par un polygone convexe ; voir aussi [21], théorème 2).

Ce sont non plus des méthodes empruntées à l'analyse fonctionelle, mais des techniques de fonctions de plusieurs variables complexes, développées par Hörmander [12], Skoda [18], S. Hänsen [11], ou plus récemment par Berenstein et Taylor [1], qui nous permettent de donner quelques résultats dans ce sens. Nous démontrons en particulier dans ce chapitre le résultat suivant (théorème III.3.1, et remarque p. III.26) :

"soient $\mu_1,\ldots,\mu_n$ n éléments de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$; une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un ouvert relativement compact Ω de $\mathbb{R}^n$ tel que tout élément de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ soit congru, modulo l'idéal $\sum_{j=1}^{n} \mu_j * \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, à un élément de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ dont le support soit inclus dans Ω, s'énonce sous la forme :

(R) $\exists \varepsilon>0, \exists c>0, \forall Z\in\mathbb{C}^n \sum_{j=1}^{n} |\hat{\mu}_j(Z)|<\varepsilon e^{-Cp(Z)} \Rightarrow |\mathrm{Im}Z| \leq C(1+\mathrm{Log}(1+\|Z\|))$".

Comme le remarque D. Struppa en conclusion de [19], ce résultat subsiste lorsque $M \neq n$.

Bien qu'il y figure la démonstration de certains théorèmes généraux (comme celui que nous venons de citer) nous avons choisi de centrer ce chapitre autour d'un exemple de système d'équations de convolution (dans $\mathbb{R}^2$) très simple illustrant assez bien ces notions et pour lequel se posent à la fois le problème de la synthèse spectrale (que nous avons évoqué au chapitre II) et celui de la "propagation des singularités", c'est à dire celui de la recherche d'un ouvert relativement compact Ω tel que toute solution distribution du système, régulière sur Ω, le soit en fait partout. Ce problème est le suivant :

"Si a désigne un irrationnel de $]0,1[$, que peut-on dire des fonctions continues dans $\mathbb{R}^2$ solutions du système d'équations de convolution :

$$(3) \qquad f(x) = \frac{1}{4} \sum_{\substack{\varepsilon=\pm 1 \\ \varepsilon'=\pm 1}} f(x+\varepsilon, x+\varepsilon') = \frac{1}{4} \sum_{\substack{\varepsilon=\pm 1 \\ \varepsilon'=\pm 1}} f(x + a\varepsilon, x + a\varepsilon') \ ?"$$

Ce problème a un double intérêt : un argument de perturbation élémentaire nous montre que le spectre d'un tel système ne peut-être inclus dans une bande de $\mathbb{C}^2$ de la forme $\{|\mathrm{Im}\ Z| \leq T\}$ (III-pp 2.1) ; les techniques élaborées au § II-A pour prouver la synthèse spectrale ne s'appliquent donc pas. Celle-ci est pourtant encore satisfaite ; nous avons recours à une idée que nous mettrons complètement à profit dans les deux dernières parties de ce travail (§ IV, § V) : pour montrer qu'un couple (F_1, F_2) d'éléments de $E'(\mathbb{C}^2)$ est "slowly decreasing" au sens de Beresnstein-Taylor, il suffit de montrer qu'il existe $\varepsilon' > 0$, $K' > 0$, $K'_1 > 0$, $K'_2 > 0$ tels que :

(a') les composantes connexes de $\{Z \in \mathbb{C}^n, |F_1(Z)|+|F_2(Z)| + |\mathrm{Jacobien}\ (F_1, F_2)\ (Z)| < \varepsilon' e^{-K'p(Z)}\}$ sont bornées ;

(b') si $\mathcal{C}'$ est une telle composante connexe, et si Z et Z' sont deux points de $\mathcal{C}'$, on a $p(Z) \leq K'_1\, p(Z') + K'_2$ (proposition III-1-1).

Nous reviendrons ultérieurement sur cette idée (§IV, §V).

Examinons maintenant le système d'équations (3) du point de vue de la propagation des singularités ; il n'est pas question de déterminer, pour un tel système, de domaine fondamental. En revanche, la propriété (R) est vérifiée si et seulement si le nombre a n'appartient pas à une certaine classe de nombres de type Liouville, c'est à dire de nombres ayant de trop bonnes approximations rationnelles (III-pp2.2) ; lorsque (R) est réalisée, il existe donc un ouvert relativement compact Ω (a) tel que toute solution continue (ou dans L^2_{loc}) de (3) nulle sur Ω (a) soit en fait nulle partout, ou que toute solution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ de (3) régulière dans Ω (a) le soit en fait partout. Nous sommes très loin ici du théorème des deux rayons de Delsarte [6] qui nous assure que si une fonction continue est moyenne en tout point X de $\mathbb{R}^2$ de ses valeurs sur les cercles de rayon 1 et a et de centre X (ou a est un élément de $]0,1[$ distinct de certaines valeurs exceptionnelles), alors elle est harmonique dans le plan ; en effet, lorsque a est de type constant (a a donc de "mauvaises approximations rationnelles"), nous montrons grâce à des techniques hilbertiennes élémentaires, qu'il existe un nombre $\varepsilon(a) > 0$ tel que tout élément de $L^2([-\varepsilon(a),\varepsilon(a)]^2)$ se prolonge -sûrement pas de manière unique - en une solution dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ du système (3).

§ IV Les exemples de systèmes d'équations de convolution étudiés dans les deux précédents chapitres sont tous des exemples où les distributions sont soit à support fini, soit "gouvernées" comme dans l'exemple de Delsarte par des distributions à support fini. Il était naturel de se poser les questions suivantes : soient $\mu_1,\ldots,\mu_M$ M distributions à support fini dans $\mathbb{R}^n$, telles que la variété $\{Z \in \mathbb{C}^n,\ \hat{\mu}_1(Z)=\ldots=\hat{\mu}_M(Z) = 0\}$ soit de dimension 0 ; y a t'il synthèse spectrale pour le système d'équations de convolution (4) $\mu_1 * \check{f} =\ldots=\mu_M * \check{f} = 0$? Lorsque M = n, les conditions de Berenstein-Taylor sont elles satisfaites pour le n-uplet $(\hat{\mu}_1,\ldots,\hat{\mu}_n)$ relativement au poids p ?

Dans [10], Gurevich démontre que si $\mu_1,\ldots,\mu_M$ sont M distributions à support compact dans $\mathbb{R}^n$, une condition suffisante pour que le système (4) satisfasse aux conditions de la synthèse spectrale est qu'il existe ε, K, K_1, K_2, constantes positives telles que :

(a) les composantes connexes de $\{Z\in\mathbb{C}^n,\ \sum_{j=1}^{M} |\hat{\mu}_j(Z)| < \varepsilon\ e^{-Kp(Z)}\}$

sont bornées ;

(b) si $\mathcal{C}$ est l'une de ces composantes connexes, et si Z et Z' sont deux points de $\mathcal{C}$, $p(Z) \leq K_1\, p(Z') + K_2$.

Il suffit même que les conditions ci-dessus soient satisfaites pour un poids avec lequel il est dans la pratique plus commode de travailler à savoir $p(Z) = \|Z\|$. Ce résultat généralise partiellement les résultats de Berenstein - Taylor valables pour les intersections complètes mais ne nous donne pas de théorème de représentation analogue au théorème 10.1 de [1] ; il ne nous dit pas non plus que l'idéal de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ engendré par $\mu_1,\ldots\mu_M$ est fermé pour la topologie de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Gurevich a donné dans [9] une illustration de ses résultats particulièrement intéressante : il démontre que si $\mu_1,\ldots,\mu_M$ sont des éléments de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ à support fini dans $\mathbb{Q}^2$, les conditions (a) et (b) sont remplies pour un choix correct de ε, K, K_1,K_2, (et lorsque le poids p est remplacé par le poids $\tilde{p}(Z) = \|Z\|$) dès que le spectre du système (4) est discret. Cela est suffisant pour prouver que les systèmes d'équations de convolution correspondant satisfont aux conditions de la synthèse spectrale ; cela ne l'est pas en revanche pour montrer que l'idéal de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ engendré par les $\hat{\mu}_j$ (j=1,...,M) est fermé ou que toute solution du système correspondant se représente à l'aide de mesures ou de dérivées de mesures portées par le spectre (voir l'énoncé du théorème 10.1 de [1] pour plus de détails).

Dans le chapitre IV (dont l'essentiel fera l'objet d'une publication en commun avec C.A. Berenstein) nous avons étudié les couples d'éléments de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$, à support fini inclus dans $\mathbb{Q}^2$, et dont le spectre est discret. Nous rencontrons malheureusement le même type d'obstacles que Gurevic dans [9] pour généraliser ces méthodes aux n-uplets d'éléments de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ satisfaisant aux mêmes propriétés.

Nous démontrons dans ce chapitre le théorème suivant (théorème IV-1)

" soient F_1 et F_2 deux exponentielles-polynômes de deux variables, à fréquences dans $i\mathbb{Q}^2$, telles que la variété $\{F_1 = F_2 = 0\}$ soit de dimension 0 ; pour tout couple ε, K de constantes positives, il existe un couple (ε_1, K_1) de constantes positives tel que :

(α) les composantes connexes de $\{Z \in \mathbb{C}^2, |F_1(Z)|+|F_2(Z)|<\varepsilon_1 e^{-K_1 p(Z)}\}$ sont bornées ;

(β) si Z et Z' sont dans l'une de ces composantes connexes, on a $d(Z,Z') < \varepsilon\, e^{-Kp(Z)}$."

La méthode de démonstration repose sur deux idées ; l'une, due à Gurevich [9], est que la restriction d'une exponentielle polynôme de deux variables à une variété algébrique de dimension 1 sur laquelle elle n'est pas identiquement nulle, se comporte localement, au point de vue des minorations, comme une exponentielle-polynôme d'une variable dans $\mathbb{C}$ (lemme IV 3.2) ; la seconde consiste à étudier, comme nous l'avons fait au chapitre précédent, les composantes connexes de l'ensemble où les trois fonctions F_1, F_2, Jacobien (F_1, F_2) sont simultanément petites. Répondant à une question soulevée par C.A. Berenstein dans un exposé au séminaire Lelong (juin 1979), nous envisageons également dans ce chapitre le cas des systèmes d'équations de convolution du type Delsarte dans $\mathbb{R}^2$, où les distributions μ_1 et μ_2 sont de la forme :

$$\mu_j = a_j\, \delta(0,0) + b_j\, \delta(1,0) + c_j\, \delta(0,1) + d_j\, \delta(1,1) + \nu_j,\ j=1,2,$$

ν_1 et ν_2 étant deux distributions à support fini, inclus dans $]0,1[\times]0,1[$, porté par un sous-groupe Γ de $\mathbb{R}^2$ de la forme $\mathbb{Z}(\alpha,\beta)$, ou $(\alpha,\beta) \in]0,1[^2$; lorsque $\mathbb{Z}(\alpha,\beta) \cap (]0,1[)^2 = \{(\alpha,\beta)\}$, nous pouvons alors démontrer (proposition V 4.3) qu'en général le couple $(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2)$ est "slowly decreasing" relativement au poids p dans $\mathbb{C}^2$; c'est toujours le cas lorsque les distributions $\hat{\nu}_j$ sont en plus d'ordre inférieur ou égal à 1. Les résultats sont ici beaucoup moins importants que les méthodes utilisées pour étudier des couples particuliers de distributions à support fini dans $\mathbb{R}^2$; ce sont ces méthodes que nous avons tenté d'approfondir dans la cinquième partie de ce travail.

§ V Dans cette partie, nous nous proposons de démontrer un résultat concernant les systèmes d'exponentielles polynômes de n variables, à fréquences dans $i\mathbb{R}^n$, à spectre discret ; ce résultat recouvrira à la fois les exemples du type Delsarte et l'exemple du théorème 1 de IV ; nous en donnerons également, dans le cas ou n = 2, une autre application généralisant un résultat partiel de IV (proposition IV 4.1) ; ce théorème nous parait être un pas vers la généralisation au cas de n variables du théorème IV.1. Le résultat est le suivant (théorème V.1)

"Soit Γ un sous groupe de $\mathbb{R}^n$, de la forme $\Gamma = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}\alpha_S$; soient $\mu_1, \ldots \mu_M$ M distributions à support fini dans $\mathbb{R}^n$, inclus dans Γ ; on suppose qu'il existe $\varepsilon_o > 0$ tel que, si χ désigne un élément de Hom $(\Gamma, \mathbb{C}^*)$, on ait :

(H) $\sup_{j=1,\ldots,S} |\chi(\alpha_j) - 1| < \varepsilon_o \Rightarrow \{Z \in \mathbb{C}^n ; (\chi\mu_1)\hat{} = \ldots = (\chi\mu_M)\hat{} = 0\}$ est discret (si $\mu = \Sigma\, a_\gamma\, P_\gamma(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}) * \delta_\gamma$, on note $\chi\mu =$ $\Sigma\, \chi(\gamma)\, a_\gamma\, P_\gamma(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}) * \delta_\gamma$).

Le système d'équations de convolution $\mu_1 * \check{f} = \ldots = \mu_M * \check{f} = 0, f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ possède alors la propriété de la synthèse spectrale".

Nous démontrons en fait que sous les hypothèses du théorème : $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, C > 0$, $\exists\, \varepsilon_1 > 0$, $\exists\, c_1 > 0$ avec :

(α) les composantes connexes de $\{Z \in \mathbb{C}^n, \sum_{j=1}^{M} |\hat{\mu}_j(Z)| < \varepsilon_1\, e^{-C_1 p(Z)}\}$ sont bornées ;

(β) si $\mathcal{C}$ est une telle composante connexe, Z et Z' étant deux points de $\mathcal{C}$, on a $d(Z,Z') \leq \varepsilon\, e^{-Cp(Z)}$.

L'idée de la démonstration est d'étudier la restriction aux variétés algébriques de $\mathbb{C}^{n+S}$ du S-uplet de fonctions analytiques $(e^{i<\alpha_1, Z'>} - z_{n+j})_{j=1}$, où $Z' = (z_1, \ldots, z_n)$, en utilisant une démonstration par récurrence sur la dimension de la variété algébrique ; le point essentiel est que seule entre en ligne de compte la nature géométrique de l'ensemble qui constitue la variété algébrique et non les multiplicités éventuelles des différentes composantes.

Dans le même ordre d'idées, nous généralisons également dans ce chapitre le résultat de Gurevich[9] concernant la restriction des exponentielles - polynômes de deux variables aux variétés algébriques de dimension 1 de $\mathbb{C}^2$; nous démontrons le même résultat dans $\mathbb{C}^n (n \geq 2)$ (proposition V-2.2), ce qui nous permet (proposition V-5.1, voir aussi [22]) de donner d'autres conditions suffisantes pour qu'un système de la forme $\mu_1 * \check{f} = \ldots = \mu_M * \check{f} = 0$, où $\mu_1, \ldots, \mu_M$ sont à support fini, satisfasse aux conditions de la synthèse spectrale et également, lorsque M = n aux hypothèses du théorème 10.1 de Berenstein-Taylor [1].

Nous donnons enfin un exemple de système de deux équations de convolution correspondant à des distributions à support fini dans $\mathbb{R}^2$ tel que soient réalisée la propriété de la synthèse spectrale : il s'agit du cas où les deux distributions μ_1 et μ_2 sont portées par deux droites non parallèles du plan affine ($\mathrm{Supp}(\mu_1) \subset L_1$, $\mathrm{Supp}(\mu_2) \subset L_2$ $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, $L_1 \neq L_2$) ; Ce corollaire V.4.3 apparait comme une généralisation de la proposition IV 4.1.

La difficulté essentielle pour ce genre de problème est qu'il est souvent très malaisé de s'assurer qu'une variété analytique de $\mathbb{C}^n$ définie par l'annulation d'un certain nombre d'exponentielles polynômes est de dimension 0 ; ce sont souvent des conditions de nature géométrique sur les supports des distributions μ_i (le cas type est l'exemple de Delsarte généralisé dans II-A, où celui que nous venons de citer dans $\mathbb{C}^2$ au précédent paragraphe) qui contraignent le spectre du système à se trouver dans une bande de $\mathbb{C}^2$ (comme dans l'exemple de Delsarte) ou a avoir une propriété supplémentaire (par exemple, toute composante éventuelle du spectre de dimension 1 est algébrique dans le second exemple, voir proposition V-4.1).

Signalons enfin en guise de conclusion que nous ne savons pas encore si les systèmes d'équations de convolution $\mu_1 * \check{f} = \ldots = \mu_p * \check{f} = 0$, $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq n$, avec $\mathrm{codim} \{\hat{\mu}_1 = \ldots = \hat{\mu}_p = 0\} = p$, où $\mu_1, \ldots, \mu_p$ sont des distributions à support fini dans $\mathbb{R}^n$, inclus dans $\mathbb{Q}^n$, sont "slowly decreasing" au sens de Berenstein-Taylor relativement au poids $p(Z)$ et par rapport à la famille de sous-espaces ($z_{p+1} = \mathrm{cst}, \ldots, z_n = \mathrm{cst}$) (voir le chapitre V de [1], ou également [19], pour un rappel de ces définitions) ; le résultat est en revanche vrai lorsque $\mu_1, \ldots, \mu_p$ sont en plus des mesures [1]. Les méthodes développées ci-dessus (et en particulier le théorème V.1) devraient constituer une approche de ce problème lorsque $p = n$.

L'un des problèmes qui se pose depuis les travaux de Berenstein-Taylor [1], est d'élargir la classe des exemples de systèmes d'équations de convolution $\mu_1 * \check{f} = \ldots = \mu_m * \check{f} = 0$ (où $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$) où s'appliquent les hypothèses du théorème 10.1 de [1], c'est à dire pour lesquels un résultat analogue au principe fondamental de Ehrenpreis est toujours valable (m doit être dans ce cas supposé inférieur ou égal à n). Ce travail constitue diverses tentatives

dans cette direction ; le principal problème soulevé est celui de l'extension aux systèmes de distributions à support fini, porté par Q^n, du théorème fondamental de Ehrenpreis.

[1] Berenstein C.et Taylor B. , Interpolation problems in $\mathbb{C}^n$ with applications to harmonic Analysis, Journal Analyse Mathématique 38 (1980), 188-254.

[2] Berenstein C. Rapport sur [IA] ; Math. Reviews 58 # 23351.

[3] Björk J.E. Rings of differential operators, North Holland Publishing Company, Amsterdam Oxford New-York 1979.

[4] Brown L., Schreiber B. Taylor B. A, spectral synthesis and the Pompeiu Problem, Annales de l'Institut Fourier, 23 (1973), 125-154.

[5] Delsarte J. , théorie des fonctions moyennes périodiques de deux variables, Ann. of Math. 12 (1960), 121-178.

[6] Delsarte J. Note sur une propriété nouvelle des fonctions harmoniques, C.R. Acad. Sc. Paris, 246 (1958), 1358-1360.

[7] Ehrenpreis L. Fourier Analysis in several complex variables, Wiley Interscience, New-York 1970.

[8] Gurevich D.I.,Counter examples to a problem of L. Schwartz, Fonl. Anal. Appl. 9 (1975), 116-120.

[9] Gurevich D.I., closed ideals with exp. polynomial generators in rings of entire functions of two variables, Izv. Akad. Nauk. Armjan. SSR ser Math. (1974), 459-472, 510, Math. Reviews 52, # 785,(en russe).

[10] Gurevich D.I., closed ideals with the zero dimensional root set in certain rings of holomorphic functions, Journal of Soviet Math. 9 vol 2 (1978), 172-182.

[11] Hänsen S., uniqueness of the Cauchy problem for convolution Equations, Journal für die reine und angewandte Mathematik vol. 317 (1980), 1-15.

[12] Hörmander L. Generators for some rings of analytic functions, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 943-949.

[13] Kahane J.P. Lectures on mean periodic functions, Tata Institute 1957.

[14] Malgrange B. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier 6 (1955-56) 271-355.

[15] Meyer Y. Remarques sur un théorème de J. Delsarte, Ann. Inst. Fourier, 26 (1976), 133-152.

[16] Meyer Y. Comportement asymptotique des solutions de certaines équations de convolution, Journal de Math. pures et appliquées, 55, 1976, 69-98.

[17] Palamadov V. Linear differential operators with constant coefficients, Springer Verlag, New-York, 1970.

[18] Skoda H. Application des techniques L^2 à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série, 5, n°4 (1972), 545-579.

[19] Struppa D.C. The fundamental principle for systems of convolution equations, PhD Thesis-University of Maryland (1981).

[20] Yger A. Comptes rendus Acad. Sc. Paris 288, série A, 1979, p.497.

[21] Yger A. Comptes rendus Acad. Sc. Paris, 289, série A. 1980, p.169.

[22] Yger A. Comptes rendus Acad. Sc. Paris, 292, série A 1981, p. 543.

C H A P I T R E II

FONCTIONS MOYENNE-PERIODIQUES DE DEUX VARIABLES
ETUDE DE SYSTEMES D'EQUATIONS DE CONVOLUTION
ENVISAGES PAR J. DELSARTE

L'objet de ce travail tient en partie à la remarque suivante . Soit ω une fonction continue $\mathbb{R}^+ \mapsto [1,+\infty[$, K un compact de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$.

Désignons par E_ω^K un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, invariant par translation tel que :

$$\forall\, f \in E_\omega^K \ , \ \forall X \in \mathbb{R}^n, \ |f(X)| \leq \omega(\|X\|)\, \|f\|_K \ .$$

Dans le cas $n = 1$, on montre que :

$$E_\omega^K \subset \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \ , \ (\delta_{x_o} + \mu + \delta_{x_1}) * f = 0\}$$

où x_o, x_1, sont tels que $]x_o,x_1[\supset K$, et μ une mesure portée par le compact K.

Cela résulte du théorème de Hahn-Banach.

L'étude de telles équations de convolution, en particulier dans le cas où supp μ est fini, a été faite par Yves Meyer ([10],B).

Dans le cas $n = 2$, on montre de la même manière :

$$E_\omega^K \subset \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2), \ \mu_1 * f = \mu_2 * f = 0\}$$

$$\mu_1 = a_1 \delta_{A_o} + b_1 \delta_{A_1} + c_1 \delta_{A_2} + d_1 \delta_{A_3} + \rho_1$$

$$\mu_2 = a_2 \delta_{A_o} + b_2 \delta_{A_1} + c_2 \delta_{A_2} + d_2 \delta_{A_3} + \rho_2$$

où $A_o\ A_1\ A_2\ A_3$ désigne un carré dont l'intérieur contient K, ρ_1 et ρ_2 deux mesures portées par K, a_i, b_i, c_i, d_i des nombres complexes tels que :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_1 & a_1 \\ d_2 & a_2 \end{vmatrix} \neq 0 \ .$$

L'étude d'un tel système, dans le cas où ρ_1 et ρ_2 sont des densités répandues à l'intérieur du carré, a été faite par J. Delsarte ([1], A), reprise par Yves Meyer ([5],A).

Dans une première partie, on montre, pour les systèmes du type précédent $\mu_1 * f = \mu_2 * f = 0$, la densité des solutions élémentaires dans l'espace des solutions C^∞ du système. Ce résultat sera d'ailleurs démontré dans un cadre géométrique plus général.

Dans une seconde partie, en nous appuyant sur la remarque que toute solution L^2_{loc} de $\mu_1 * f = \mu_2 * f = 0$ s'identifie avec un élément de $L^2(D)$, où D désigne le "carré double" $(A_o A'_1 A'_2 A_3)$, nous étudierons, en particulier dans le cas où ρ_1 et ρ_2 sont à support fini, le comportement asymptotique des solutions du système.

Nous verrons d'ailleurs que :

$$E^k_\omega \subset \{ f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^2),\ \mu_1 * f = \mu_2 * f = 0 \}$$

$\Rightarrow \exists\ T > 0\ ,\ C > 0\ ,$

$$\forall f \in E^K_\omega\ ,\ \forall X \in \mathbf{R}^2\ ,\ |f(X)| \leq C\, e^{T\|X\|} . \|f\|_K .$$

A - UNE GENERALISATION D'UN THEOREME DE J. DELSARTE

A.1 Introduction

Soient μ_1 et μ_2 deux distributions à support compact dans $\mathbb{R}^2$. Un problème jusque là ouvert de la théorie des fonctions moyenne-périodiques de deux variables était de savoir si les solutions élémentaires du système $f * \mu_1 = 0$ et $f * \mu_2 = 0$ forment une partie totale dans l'espace vectoriel de toutes les solutions indéfiniment dérivables de ce même système ; une solution élémentaire est, par définition, une solution de la forme $f(x,y) = P(x,y) \exp i(ux + vy)$ où $(u,v) \in \mathbb{C}^2$.

Gurevich [4] a donné une réponse négative à ce problème. Cependant, dans certains cas particuliers, la réponse est connue. Par exemple, Delsarte a prouvé qu'il y a totalité si μ_1 et μ_2 sont toutes deux la somme de quatre masses ponctuelles portées par les sommets d'un carré et d'une densité suffisamment régulière étendue à l'intérieur de ce carré. De plus, Delsarte considérait la matrice $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ dont les lignes sont les quatre masses ponctuelles de μ_1 et μ_2 aux quatre sommets A, B, C, D du carré, de côtés AB, BC, CD, DA .

Il faisait de plus l'hypothèse que les quatre déterminants (associés aux côtés) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} d_1 & a_1 \\ d_2 & a_2 \end{vmatrix}$ sont tous différents de 0.

Notre propos est d'étendre le théorème de Delsarte au cas d'un polygone convexe et compact. Par polygone convexe et compact nous entendons une partie compacte P du plan affine qui soit une intersection finie de demi-plans fermés ; nous supposerons que P n'est pas un segment car dans ce cas les hypothèses faites au théorème 1 entraînent que la seule fonction f vérifiant $f * \mu_1 = f * \mu_2 = 0$ est la fonction nulle.

A.2 Enoncé du théorème 1

Théorème 1 : Soit P un polygone convexe et compact du plan affine dont les $n+1$ sommets sont $A_0, A_1, \ldots, A_n$ et les $n+1$ côtés sont $A_0A_1, \ldots, A_{n-1}A_n$ et A_nA_0. Soient μ et ν deux mesures de Radon complexes ayant les propriétés suivantes

(1) les supports de μ et ν sont contenus dans P

(2) en notant a_j (resp. b_j) la masse de μ (resp. ν) en A_j, on a $a_j b_{j+1} - a_{j+1} b_j \neq 0$ pour $0 \leq j \leq n$; avec la convention que l'indice $n+1$ est 0.

(3) μ et ν ne chargent pas les côtés ouverts $]A_j A_{j+1}[$ $(0 \leq j \leq n)$:

$$\int_{]A_j, A_{j+1}[} d|\mu| = \int_{]A_j, A_{j+1}[} d|\nu| = 0 .$$

Alors les solutions $f(x,y) = P(x,y)\exp i(ux+vy)$, $P \in \mathbb{C}[X,Y]$, $(u,v) \in \mathbb{C}^2$ du système

$$f * \mu = f * \nu = 0 \tag{4}$$

forment une partie totale dans l'espace vectoriel des solutions continues de (4) ; la topologie étant celle de la convergence uniforme sur tout compact.

Le cas examiné par Delsarte était celui où P est le carré $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$; alors si D désigne le rectangle $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$; il est facile de prouver ([4]) que toute fonction $g \in L^2(D)$ est la restriction à D d'une fonction $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant (4) presque-partout. Cette observation conduit d'ailleurs à une preuve très simple du théorème de Delsarte. Nous ne savons pas si l'on peut trouver, dans le cadre du théorème 1, un tel domaine fondamental D.

A.3 Une première réduction et le plan de la démonstration

Traditionnellement, on démontre par dualité les théorèmes de totalité. On peut évidemment ramener une solution continue (ou dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$) de (4) à être indéfiniment dérivable par convolution avec une approximation de l'identité. Nous prouverons la totalité dans l'espace $\mathcal{E}$ des fonctions indéfiniment dérivables (sans condition de croissance) dont le dual est l'espace $\mathcal{E}'$ des distributions à support compact.

Il est classique d'observer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes pour une distribution $\tau \in \mathcal{E}'$

(5) Pour toute solution élémentaire $f(x,y) = P(x,y)\exp i(zx+wy)$ du système (4) $\tau * f = 0$.

(6) Pour tout point $p_o = (z_o, w_o) \in \mathbb{C}^2$, il existe deux fonctions holomorphes au voisinage de p_o, $A_{p_o}(z,w)$ et $B_{p_o}(z,w)$, telles qu'au voisinage de p_o, on ait $\hat{\tau}(z,w) = A_{p_o}(z,w)\hat{\mu}(z,w) + B_{p_o}(z,w)\nu(z,w)$; dans tout ce qui suit le signe $\hat{}$ désigne la transformée de Fourier complexe.

Montrer la totalité des solutions élémentaires revient à démontrer que pour toute distribution $\tau \in \mathcal{E}'$ la condition (6) entraîne que τ appartient à la fermeture (pour la topologie $\sigma(\mathcal{E}', \mathcal{E})$) de l'idéal $\mu * \mathcal{E}' + \nu * \mathcal{E}'$.

Nous allons prouver que cet idéal est fermé.

Théorème 2 : Soient μ et ν deux mesures vérifiant les hypothèses du théorème 1. Alors l'idéal $\mathcal{J} = \mu * \mathcal{E}' + \nu * \mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}'$ est fermé pour la topologie $\sigma(\mathcal{E}', \mathcal{E})$ et les deux propriétés suivantes sont équivalentes pour toute distribution $\tau \in \mathcal{E}'$

(a) $\tau \in \mathcal{J}$

(b) pour tout $p_o = (z_o, w_o) \in \mathbb{C}^2$, $\hat{\tau}(z,w)$ appartient à l'idéal $\mathcal{O}\hat{\mu} + \mathcal{O}\hat{\nu}$; $\mathcal{O}$ désigne l'anneau des germes de fonctions de z et w holomorphes au voisinage de p_o .

Naturellement (a) est équivalent à la propriété

(7) il existe deux fonctions entières A(z,w) et B(z,w), satisfaisant les conditions de croissance du théorème de Paley-Wiener et telles que

$$\hat{\tau}(z,w) = A(z,w)\hat{\mu}(z,w) + B(z,w)\hat{\nu}(z,w).$$

Il est évident que a) ⇒ b).

Pour montrer que b) ⇒ a), il faut choisir pour chaque $p_o \in \mathbb{C}^2$ des coefficients $A_{p_o}(z,w)$ et $B_{p_o}(z,w)$ qui puissent se recoller en des fonctions globales A(z,w), B(z,w) entières et vérifiant les conditions de croissance du théorème de Paley-Wiener.

Ce recollement se fera en deux temps.

I. A l'aide du théorème des voisinages privilégiés de A. Douady, nous allons trouver deux nombres réels $r > 0$, $R > 0$, un entier $q \geq 0$ et une constante $C > 0$ tels que, pour tout $p_o \in \mathbb{C}^2$, l'on puisse construire deux fonctions $A_{p_o}(z,w)$ et $B_{p_o}(z,w)$, holomorphes au voisinage de $\{|z - z_o| \leq r ; |w - w_o| \leq R\}$ et vérifiant, sur ce voisinage,

(8) $$\hat{\tau}(z,w) = A_{p_o}(z,w)\hat{\mu}(z,w) + \beta_{p_o}(z,w)\hat{\nu}(z,w)$$

et

(9) $$\sup_{|z-z_o| \le r \text{ et } |w-w_o| \le R} (|A_{p_o}(z,w)| + |B_{p_o}(z,w)| \le C(1+\|p_o\|)^q e^{C(|\mathrm{Im}\, z_o| + |\mathrm{Im}\, w_o|)}.$$

II. A l'aide d'une méthode due à Ehrenpreis nous recollerons les décompositions obtenues au I pour obtenir $A(z,w)$ et $B(z,w)$.

A.4 Localisation du spectre

Le spectre Λ associé au couple (μ,ν) est l'ensemble des $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\hat{\mu}(z,w) = \hat{\nu}(z,w) = 0$. Nous allons montrer que Λ est contenu dans une bande horizontale $|\mathrm{Im}\, z| \le C$, $|\mathrm{Im}\, w| \le C$.

Cependant, dans la discussion qui précèdera l'application du théorème des voisinages privilégiés de Douady, il sera important d'associer au couple (μ,ν) tous les couples $(\chi\mu,\chi\nu)$ où $\chi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^2,\mathbb{T}) = G$; G est le groupe, isomorphe à $\mathbf{R}^2$, de tous les caractères continus sur $\mathbf{R}^2$.

Pour tout $\chi \in G$, soit Λ_χ l'ensemble des $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ tels que $(\chi\mu)\hat{}(z,w) = (\chi\nu)\hat{}(z,w) = 0$. On a alors le résultat suivant.

Lemme 1 : Il existe deux constantes T_1 et T_2 telles que, pour tout $\chi \in G$, Λ_χ soit contenu dans $|\mathrm{Im}\, z| \le T_1$ et $|\mathrm{Im}\, w| \le T_2$.

Nous aurons, en fait, besoin d'un résultat plus précis nécessitant des notations supplémentaires.

Soit $(\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan euclidien. Pour tout vecteur unitaire $\vec{u} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$ et pour tout $\alpha > 0$, le secteur angulaire ouvert $S_\alpha(\vec{u})$ est défini par $|x\sin\theta - y\cos\theta| < \alpha(x\cos\theta + y\sin\theta)$.

On peut alors énoncer .

Lemme 2 : Pour tout vecteur unitaire $\vec{u}$, on peut trouver deux constantes complexes c et d et des nombres réels strictement positifs α, δ, C_1 et C_2 tels que $\forall (z,w) \in \mathbb{C}^2$, les conditions $(\mathrm{Im}\, z, \mathrm{Im}\, w) \in S_\alpha(\vec{u})$ et $\mathrm{Im}\, z\cos\theta + \mathrm{Im}\, w\sin\theta \ge C_1$ entraînent: $\exists\, i \in \{1,2\}$ tel que pour tout χ dans G

(10) $$|c_i(\chi\mu)\hat{}(z,w) + d_i(\chi\nu)\hat{}(z,w)| \geq \delta \exp[-C_2(\Im m\, z \cos\theta + \Im m\, w \sin\theta)].$$

Avant de prouver ce résultat nous allons en déduire un corollaire. Posons $|\Im m\, z, \Im m\, w| = [(\Im m\, z)^2 + (\Im m\, w)^2]^{1/2}$. Le second membre de (10) peut alors être remplacé par $\delta \exp[-C_2|\Im m\, z, \Im m\, w|]$. Ensuite on peut recouvrir $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par un nombre fini de secteurs ouverts de la forme $S_\alpha(\vec{u})$. Quitte à remplacer C_1 par une constante T plus grande, on a le résultat suivant

Corollaire : Il existe une constante $\delta_1 > 0$, une constante $C_3 > 0$, une constante $T > 0$ et un ensemble fini F de couples $(c,d) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\forall (z,w) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant $|\Im m\, z, \Im m\, w| \geq T^2$, il existe un couple $(c,d) \in F$ ayant la propriété suivante :

$$\forall \chi \in G, \quad |c(\chi\mu)\hat{}(z,w) + d(\chi\nu)\hat{}(z,w)| \geq \delta_1 \exp[-C_3|\Im m\, z, \Im m\, w|].$$

Pour prouver le lemme 2, on peut évidemment se ramener au cas où $\theta = 0$.

Deux cas se présentent dans la preuve du lemme 2.

Ou bien il y a un seul point de P d'abscisse maxima; alors ce point est un sommet et, quitte à réordonner les sommets, on pourra supposer que ce somment est A_0. Si a_0 (la masse de μ en A_0) est $\neq 0$, on choisit $c = 1$ et $d = 0$. On a alors, en appelant x_0 et y_0 les coordonnées de A_0 et $\varepsilon > 0$ un nombre qui sera fixé dans un instant,

$$|\hat{\mu}(z,w)| \geq |a_0| \exp(x_0 \Im m\, z + y_0 \Im m\, w) - I - J$$

où

$$I = \int_{P \cap \{x \leq x_0 - \varepsilon\}} \exp(x \Im m\, z + y \Im m\, w)\, d|\mu|(x,y)$$

et

$$J = \int_{P \cap \{x_0 - \varepsilon < x < x_0\}} \exp(x \Im m\, z + y \Im m\, w)\, d|\mu|(x,y).$$

On peut trouver $\alpha > 0$ tel que si $|s| \leq \alpha t$ on ait $\forall (x,y) \in P$, $tx_0 + sy_0 \geq tx + sy$. Si $|\Im m\, w| \leq \alpha |\Im m\, z|$, on obtient

$$J \leq \exp(x_0 \Im m\, z + y_0 \Im m\, w)|\mu|(P \cap \{x_0 - \varepsilon < x < x_0\}) \leq \frac{1}{3}|a_0| \exp(x_0 \Im m\, z + y_0 \Im m\, w) ;$$

si ε est assez petit.

Enfin, quitte à choisir $\alpha > 0$ assez petit, on peut trouver un $\eta > 0$ tel que, $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2$, $|s| \leq \alpha t$ implique $\sup_{P \cap \{x \leq x_o - \varepsilon\}} tx + sy \leq (1-\eta)(tx_o + sy_o)$.

On a donc $I \leq C \exp[(1-\eta)(\mathcal{I}m\, z\, x_o + \mathcal{I}m\, w\, y_o)] \leq \frac{1}{3}|a_o| \exp(x_o \mathcal{I}m\, z + y_o \mathcal{I}m\, w)$; ceci si $|\mathcal{I}m\, w| \leq \alpha\, \mathcal{I}m\, z$ et $\mathcal{I}m\, z \geq C_1$.

Le second cas est celui où deux sommets (disons A_o et A_1) ont la même abscisse maxima. On forme alors $b_1\mu - a_1\nu$ qui ne charge plus A_1 mais dont la masse en A_o est $a_o b_1 - a_1 b_o \neq 0$ et l'on applique à cette nouvelle mesure un raisonnement analogue au précédent, on doit distinguer les deux demi-cônes.

Pour énoncer le lemme 3 ci-dessous, quelques notations supplémentaires sont nécessaires. Ecrivons :

$$\mu = \sum_o^n a_i \delta_{A_i} + \rho$$

$$\nu = \sum_o^n b_i \delta_{A_i} + \sigma \quad ;$$

les hypothèses faites sur μ et ν signifient que ρ et σ sont portées par l'intérieur de P.

Lemme 3 : L'ensemble $\mathfrak{F}$ des couples de fonctions entières sur $\mathbb{C}^2$ $[(\chi\mu)\hat{}(z,w), (\chi\nu)\hat{}(z,w)]$ où $\chi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{T})$ est relativement compact pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Soit Γ le sous-groupe de $\mathbb{R}^2$ engendré par $A_o, A_1, \ldots$ et A_n ; Γ n'est pas nécessairement fermé. Soit $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{T})$ le groupe de tous les homomorphismes de Γ dans $\mathbb{T}$. Alors pour tout couple (F,G) appartenant à la fermeture $\mathcal{K}$ de $\mathfrak{F}$, il existe un $\chi_o \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{T})$ et deux mesures ρ_o et σ_o, portées par l'intérieur de P et telles que

$$F = (\chi_o \sum_o^n a_i \delta_{A_i})\hat{} + \hat{\rho}_o \quad \text{et} \quad G = (\chi_o \sum_o^n b_i \delta_{A_i})\hat{} + \hat{\sigma}_o \ .$$

La première assertion du lemme 3 est immédiate. Puisque $|\chi| = 1$ et que μ et ν ont un support compact, toutes les dérivées de $(\chi\mu)\hat{}$ et $(\chi\nu)\hat{}$ sont majorées, uniformément par rapport à χ. Le théorème d'Ascoli montre que $\mathfrak{F}$ est relativement compact.

Si $(F,G) \in \mathcal{K}$, il existe une suite $\chi_j \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{T})$ telle que $F = \lim(\chi_j \mu)\hat{}$, $G = \lim(\chi_j \nu)\hat{}$; le groupe $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{T})$ est métrisable et compact et l'on peut extraire une sous-suite ξ_j des χ_j convergente sur Γ vers χ_o .

On peut enfin, quitte à extraire des sous-suites, supposer que $\xi_j \rho \to \rho_o$ dans la topologie $\sigma(L^2 d|\rho|, L^2 d|\rho|)$ et faire l'hypothèse correspondante sur $\xi_j \sigma$. Alors $\rho_o \in L^2(d|\rho|)$; cela entraîne que ρ_o soit absolument continue par rapport à la mesure $d|\rho|$ et donc que tout ensemble de mesure nulle pour $d|\rho|$ le soit encore pour $|\rho_o|$. En particulier ρ_o est portée par l'intérieur de P. Le même raisonnement s'applique à σ_o.

Lemme 4 : Les couples $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\hat{\mu}(z,w) = \hat{\nu}(z,w) = 0$ forment un ensemble discret.

Pour tout couple $\omega = (F,G) \in \mathcal{K}$, nous désignerons respectivement par $\mathcal{V}_\omega$ l'ensemble des couples $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ tels que $F(z,w) = G(z,w) = 0$ et par $\mathcal{W}_\omega \subset \mathcal{V}_\omega$ l'ensemble des points non isolés dans $\mathcal{V}_\omega$; puisque $\mathcal{V}_\omega$ est fermé, $\mathcal{W}_\omega$ est aussi l'ensemble des points d'accumulation de $\mathcal{V}_\omega$.

Soit $E = \bigcup_{\omega \in \mathcal{K}} \mathcal{W}_\omega$ et soit $\pi(E)$ la projection de E sur la droite complexe des z.

Nous allons successivement montrer que E est fermé dans $\mathbb{C}$ et ensuite que E est ouvert dans $\mathbb{C}$. Soit nous aurons $E = \emptyset$ et le lemme 4 est prouvé ; soit $E = \mathbb{C}$ mais cette dernière assertion est incompatible avec le lemme 1. Il convient ici de remarquer que l'inégalité obtenue ou lemme 2 est encore vérifiée si l'on remplace $[(\chi\mu)\hat{}, (\chi\nu)\hat{}]$ par n'importe quel couple $(F,G) \in \mathcal{K}$. Cela implique le lemme 1 soit applicable , sans changer T_1 ou T_2 pour les $(F,G) \in \mathcal{K}$. En particulier $\pi(E)$ est contenu dans la bande $|\mathcal{I}m\, z| \leq T_1$.

- α) $\pi(E)$ est fermé dans $\mathbb{C}$.

Soit (z_n, w_n) une suite de points de E telle que $z_n \to \zeta \in \mathbb{C}$. Il existe donc une suite $(F_n, G_n) \in \mathcal{K}$ telle que $F_n(z_n, w_n) = G_n(z_n, w_n) = 0$. Puisque $|\mathcal{I}m\, w_n| \leq T_2$, on peut écrire $w_n = \sigma_n + i\tau_n$ où $\sigma_n \in \mathbb{R}$ et $|\tau_n| \leq T_2$. Or $(F,G) \in \mathcal{K}$ entraîne, pour tout σ réel, $(F_\sigma, G_\sigma) \in \mathcal{K}$ où $F_\sigma(z,w) = F(z, w+\sigma)$ et de même pour G_σ. En effet, cette translation réelle correspond, avant transformée de Fourier, à la multiplication par $\chi = e^{-i\sigma y}$. On peut donc former une nouvelle suite $(\widetilde{F}_n, \widetilde{G}_n) \in \mathcal{K}$ telle que $\widetilde{F}_n(z_n, i\tau_n) = \widetilde{G}_n(z_n, i\tau_n) = 0$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\widetilde{F}_n \to \widetilde{F}$ et $\widetilde{G}_n \to \widetilde{G}$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}^2$ tandis que $(z_n, i\tau_n) \to (\zeta, i\tau)$.

Par hypothèse $(z_n, i\tau_n)$ est un non zéro non isolé du couple $(\widetilde{F}_n, \widetilde{G}_n) \in \mathcal{K}$. Montrons alors que $(\zeta, i\tau)$ est un zéro non isolé de $(\widetilde{F}, \widetilde{G})$. Cela résulte d'une conséquence très simple du théorème des voisinages privilégiés de A. Douady (§ 5 ci-dessous). Soient φ et ψ deux fonctions analytiques au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$ telles que $\varphi(0,0) = \psi(0,0) = 0$ mais que la multiplicité d'intersection de $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ en 0 soit finie et égale à m. Il existe alors un voisinage compact V de 0 dans $\mathbb{C}^2$ et un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout couple φ_1, ψ_1 de deux fonctions analytiques au voisinage de V, les conditions $\sup_V |\varphi - \varphi_1| \leq \varepsilon$ et $\sup_V |\psi - \psi_1| \leq \varepsilon$ entraînent que le nombre de points d'intersection de $\varphi_1 = 0$ et de $\psi_1 = 0$ dans V (comptés avec leurs multiplicités) soit exactement m.

En appliquant cette remarque à $\varphi_1 = \widetilde{F}$ et $\psi_1 = \widetilde{G}$, on en déduit que $(\zeta, i\tau)$ ne peut être un zéro isolé de $(\widetilde{F}, \widetilde{G})$; sinon la multiplicité d'intersection en $(\zeta, i\tau)$ de ce couple serait finie et il serait de même pour le couple voisin $(\widetilde{F}_n, \widetilde{G}_n)$.

- β) $\pi(E)$ est ouvert dans $\mathbb{C}$.

Supposons que (z_o, w_o) soit un zéro non isolé d'un couple $(F,G) \in \mathcal{K}$. En vertu du lemme 1, il ne se peut pas que $F(z_o, w) = G(z_o, w) = 0$ pour tout $w \in \mathbb{C}$. On peut, par exemple, supposer $F(z_o, w)$ non identiquement nulle. Le théorème de préparation de Weierstrass donne une décomposition

$$F(z,w) = \left[(w-w_o)^m + a_1(z)(w-w_o)^{m-1} + \ldots + a_m(z)\right] U(z,w)$$

où $a_j(z_o) = 0$, $1 \leq j \leq m$ et où $U(z,w)$ n'est pas nulle au voisinage de (z_o, w_o).

On a une décomposition analogue pour $G(z,w)$ avec éventuellement un terme en $(z - z_o)^p$ en facteur.

Si (z_o, w_o) n'est pas un zéro isolé du couple (F,G), le discriminant $\Delta(z)$ des deux polynômes de Weierstrass est identiquement nul : $\pi(E)$ est donc ouvert.

A.5 Le théorème des voisinages privilégiés de Douady

Nous l'énoncerons sous la forme d'un lemme.

Lemme 5 : Soient a, b, c et d quatre nombres réels strictement positifs, P le pavé de $\mathbb{C}^2$ défini par $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $|\xi| \leq c$ et $|\eta| \leq d$ avec $z = x + iy$, $w = \xi + i\eta$. Soient $a_1 > a$, $b_1 > b$, $c_1 > c$ et $d_1 > d$ et $\widetilde{P}$ le pavé "élargi" défini par a_1, b_1, c_1 et d_1.

Soient M et $N \in \mathcal{O}(\widetilde{P})$, deux fonctions analytiques au voisinage de $\widetilde{P}$, n'ayant qu'un nombre fini de zéros communs sur $\widetilde{P}$.

1) il existe alors un $\varepsilon > 0$ et une constante $C > 0$ tels que $\forall M_1 \in \mathcal{O}(\widetilde{P})$, $\forall N_1 \in \mathcal{O}(\widetilde{P})$, $\forall A \in \mathcal{O}(\widetilde{P})$, $\forall B \in \mathcal{O}(\widetilde{P})$, les conditions $\sup_{\widetilde{P}} |M_1 - M| \leq \varepsilon$, $\sup_{\widetilde{P}} |N_1 - N| \leq \varepsilon$ et $AM_1 + BN_1 = 0$ au voisinage de $\widetilde{P}$ impliquent l'existence de $H \in \mathcal{O}(P)$ tel que $\sup_P |H| \leq C \sup_{\widetilde{P}} (|A| + |B|)$ et $A = -HN_1$, $B = HM_1$ sur P.

2) Les hypothèses sur M_1 et N_1 étant les mêmes que dans la partie 1, $\forall F \in M_1\mathcal{O}(\widetilde{P}) + N_1\mathcal{O}(\widetilde{P})$, $\exists A \in \mathcal{O}(P)$, $\exists B \in \mathcal{O}(P)$ tels que $F = AM_1 + BN_1$ sur P, $\sup_P |A| \leq C \sup_{\widetilde{P}} |F|$ et $\sup_P |B| \leq C \sup_{\widetilde{P}} |F|$.

Ce lemme est une conséquence très simple du théorème des voisinages privilégiés de Douady. Il s'obtient en deux temps : une version locale est exactement le théorème des voisinages privilégiés. Ensuite on recolle les décompositions locales obtenues par une méthode canonique.

Soit $S = \{p \in P ; M(p) = N(p) = 0\}$. Pour tout $p \in S$, p est un zéro isolé de M et N, de multiplicité m_p. Il existe donc une base $Q_{1,p}, \ldots, Q_{m_p,p}$, formée de polynômes, de l'espace vectoriel $\mathcal{O}_p / M\mathcal{O}_p + N\mathcal{O}_p$, dont la dimension est m_p ; $\mathcal{O}_p$ désignant l'anneau des germes de fonctions holomorphes en p.

Soit V_p un voisinage privilégié de p, contenu dans $\widetilde{P}$. En employant les notations de Douady, appelons pour tout compact $K \subset \mathbb{C}^2$, $B(K)$ la fermeture de $\mathcal{O}(K)$ dans $\mathcal{C}(K)$; une fonction $\varphi \in B(K)$ est par définition la limite uniforme sur K d'une suite de fonctions holomorphes au voisinage de K.

Le théorème des voisinages privilégiés fournit une suite exacte directe

$$0 \longrightarrow B(V_p) \xrightarrow[u_p]{} B(V_p) \oplus B(V_p) \oplus \mathbb{C}^{m_p} \xrightarrow[v_p]{} B(V_p) \longrightarrow 0$$

où $u_p(f) = (-Nf, Mf, 0, \ldots, 0)$.

$$v_p(f, g, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m_p}) = Mf + Ng + \lambda_1 Q_{1,p} + \ldots + \lambda_{m_p} Q_{m_p,p} .$$

Si conservant V_p et donc les espaces de Banach de la suite exacte directe on remplace M par M_1 et N par N_1, cela revient à changer u_p et v_p en $\tilde{u}_p$ et $\tilde{v}_p$ tels que $\|u_p - \tilde{u}_p\| \leq C\varepsilon$ et $\|v_p - \tilde{v}_p\| \leq C\varepsilon$; les normes sont celles des

applications linéaires correspondantes. On conserve, si ε est assez petit, une suite exacte directe. En particulier la dimension de l'espace quotient $B(V_p)/M_1B(V_p) + N_1B(V_p)$ reste égale à m_p ; ceci prouve que le nombre de points d'intersection de $M_1 = 0$ et $N_1 = 0$ sur V_p est égal à m_p (V_p est le produit de deux disques tels que $|M| + |N|$ ne s'annule pas sur ∂V_p ; si $\varepsilon > 0$ est assez petit il en est de même pour $|M_1| + |N_1|$). Ceci prouve la remarque dont nous avions besoin au paragraphe 4 relativement à l'invariance de la multiplicité d'intersection par petites déformations.

La première partie du lemme 5 est maintenant immédiate. On recouvre P par les intérieurs des voisinages privilégiés $V_1,\ldots,V_N$ contenus dans $\widetilde{P}$. Si $AM_1 + BN_1 = 0$ au voisinage de $\widetilde{P}$, on peut, pour tout $j = 1,\ldots,N$, trouver H_j tel que $A = -H_jN$, $B = H_jM$ sur V_j avec

$$\sup_{V_j} |H_j| \leq C \sup_{\widetilde{P}} (|A| + |B|).$$

Montrons que les H_j, restreints à $\mathring{V}_j$, définissent une fonction holomorphe H. En effet sur $\mathring{V}_j \cap \mathring{V}_k$, on a $H_j = H_k$ sauf, éventuellement, sur l'ensemble fini des zéros communs à M et N ; cela implique $H_j = H_k$ sur tout $\mathring{V}_j \cap \mathring{V}_k$.

La seconde partie est un peu plus délicate car l'écriture F $F = AM_1 + BN_1$ n'est pas unique. On choisira d'abord sur chaque V_j l'écriture "économique" $F = A_jM_1 + B_jN_1$ telle que $\sup_{V_j} |A_j| + |B_j| \leq C \sup_{\widetilde{P}} |F|$; pour ensuite recoller, avec contrôle de normes, les couples (A_j,B_j), $1 \leq j \leq N$.

Bien que cette dernière opération ne présente aucune difficulté sérieuse nous allons la décrire soigneusement car elle sera reprise telle quelle au paragraphe 6.

Désignons par $R(p,\delta)$, $p \in \mathbb{C}^2$, $\delta > 0$, le polycube défini par $|x - p_0| \leq \delta$, $|y - p_1| \leq \delta$, $|\xi - p_2| \leq \delta$, $|\eta - p_3| \geq \delta$, où $p = (p_0 + ip_1, p_2 + ip_3) \in \mathbb{C}^2$ et $(z,w) = (x + iy, \xi + i\eta)$. On peut, grâce au lemme de Lebesgue, trouver un $\delta > 0$ assez petit pour que, $\forall\, p \in P$, $R(p,\delta)$ soit contenu dans l'un des V_j, $1 \leq j \leq N$. Posons $\varepsilon = 10^{-3}\delta$.

Considérons les points "génériques" $\alpha = (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, où $\alpha_j \in \mathbb{Z}\varepsilon$, tels que $\alpha \in P$. Pour chacun de ces points, on considère l'hypercube $R(\alpha,\delta)$; sur chacun de ces hypercubes on a une décomposition $F = A^\alpha M_1 + B^\alpha N_1$ où $\sup_{R(\alpha,\delta)} |A^\alpha| + |B^\alpha| \leq C \sup_{\widetilde{P}} |F|$.

Le programme de ce qui suit est de remplacer progressivement les couples (A^α, B^α) qui dépendent des quatre indices α_o, α_1, α_2 et α_3 par des couples (A_1^α, B_1^α) tels que $F = A_1^\alpha M_1 + B_1^\alpha N_1$, vérifiant $\sup_{R(\alpha,\delta-\varepsilon)} (|A_1^\alpha| + |B_1^\alpha|) \leq C_1 \sup_{\widetilde{P}} |F|$ mais ne dépendant plus de α_o. On s'affranchit ensuite de la dépendance en α_1, puis de celle en α_2 et enfin de celle en α_3. On a alors une décomposition globale $F = AM_1 + BN_1$ telle que $\sup_P (|A| + |B|) \leq C \sup_{\widetilde{P}} |F|$.

Nous nous contenterons de décrire la façon dont on remplace les couples (A^α, B^α) par des couples (A_1^α, B_1^α) ne dépendant plus de α_o. Les autres étapes sont similaires et laissées au lecteur.

Pour tout "point générique" $\alpha = (\alpha_o, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, posons $\alpha' = (\alpha_o + \varepsilon, \alpha_1, \alpha_2, \alpha)$. Dans $R(\alpha,\delta) \cap R(\alpha',\delta)$, on a $A^{\alpha'} M_1 + B^{\alpha'} N_1 = A^\alpha M_1 + B^\alpha N_1$. Posons $P_\alpha = R(\alpha,\delta-\varepsilon) \cap R(\alpha',\delta-\varepsilon)$ et $\widetilde{P}_\alpha = R(\alpha,\delta) \cap R(\alpha',\delta)$. La première partie du lemme 5 peut être appliquée au couple $(P_\alpha, \widetilde{P}_\alpha)$ et montre l'existence d'une fonction E^α, holomorphe au voisinage de P_α et telle que $A^{\alpha'} - A^\alpha = -E^\alpha N_1$, $B^{\alpha'} - B^\alpha = E^\alpha M_1$.

Ecrivons le pavé P_α sous la forme $P'_\alpha \times P''_\alpha$ où $z \in P'_\alpha$ et $w \in P''_\alpha$. Désignons par $\partial P'_\alpha$ la frontière de P'_α par G_α l'intersection de $\partial P'_\alpha$ avec $x \leq \alpha_o$ et par D_α l'intersection de $\partial P'_\alpha$ avec $x \geq \alpha_o$. En fait, P'_α, G_α et D_α ne dépendent que de α_o et α_1 tandis que P''_α ne dépend que de α_2 et α_3.

Enfin, on désigne par Γ_α l'ensemble des $(z,w) \in P$ tels que $x \leq \alpha_o + \delta - 2\varepsilon$, $|y - \alpha_1| \leq \delta - 2\varepsilon$, $|\xi - \alpha_2| \leq \delta - \varepsilon$ et $|\eta - \alpha_3| \leq \delta - \varepsilon$; Δ_α est défini de façon analogue à la différence près que $x \geq \alpha_o - \delta + 3\varepsilon$. On commence par écrire, pour (z,w) appartenant à l'intérieur de P_α,

$$E^\alpha(z,w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P_\alpha} \frac{E^\alpha(\zeta,w)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{D_\alpha} \frac{E^\alpha(\zeta,w)}{\zeta - w} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{G_\alpha} \frac{E^\alpha(\zeta,w)}{\zeta - z} d\zeta =$$

$E_d^\alpha(z,w) - E_d^\alpha(z,w)$ où E_g^α est holomorphe dans un voisinage de Γ_α et E_d^α au voisinage de Δ_α. Enfin on a

$$\sup_{\Gamma_\alpha} |E_g^\alpha| \leq C \sup_P |F| \quad \text{et} \quad \sup_{\Delta_\alpha} |E_d^\alpha| \leq C \sup_P |F| .$$

On pose alors

$$A_1^\alpha = A^\alpha + \Big(\sum_{\beta_o \geq \alpha_o} E_g^\beta - \sum_{\beta_o < \alpha_o} E_d^\beta \Big) N_1$$

et

$$B_1^\alpha = B^\alpha - \Big(\sum_{B_o \geq \alpha_o} E_o^\beta - \sum_{\beta_o < \alpha_o} E_d^\beta \Big) M_1$$

avec la convention que $\beta = (\beta_o, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est un point générique (appartenant à P et dont toutes les coordonnées appartiennent à $Z\varepsilon$) et que la sommation est remplacée par 0 s'il n'existe pas de points génériques β tels que $\beta_o > \alpha_o$ (ou $\beta o < \alpha_o$).

On vérifie sans peine que A_1^α et B_1^α ne dépendent plus de α_o ; il suffit pour cela d'assurer que $A_1^\alpha = A_1^{\alpha'}$ et $B_1^\alpha = B_1^{\alpha'}$. De plus, on a évidemment $M_1 A_1^\alpha + N_1 B_1^\alpha = M_1 A^\alpha + N_1 B^\alpha = F$. Enfin $\sup_{Q_\alpha}(|A_1^\alpha| + |B_1^\alpha|) \leq C \sup_{\widetilde{P}} |F|$.

Cette dernière propriété tient à ce que P est compact et que toutes les sommes écrites sont finies.

Il reste à itérer le procédé employé en faisant cette fois varier α_1 ; α_2 et α_3 restant fixés et ainsi de suite. Les constructions employées sont semblables à celles que nous venons d'utiliser à cette différence près que dans la définition de $R(\alpha,\delta)$ et de α, il n'y a plus de conditions portant sur $x = \mathrm{Re}\, z$ et α_o.

Ceci achève la preuve du lemme 5.

A.6 Fin de la démonstration du théorème 2

Soit $F \in E'$, algèbre des tranformées de Fourier complexes des distributions $\tau \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$. Supposons que $\Psi(z_o, w_o) = p \in \mathbb{C}^2$, F appartienne à l'idéal $\mathcal{O}_p \hat{\mu} + \mathcal{O}_p \hat{\nu}$ de $\mathcal{O}_p$. Nous allons montrer l'existence de deux fonctions A et $B \in E'$ telles que $F = A\hat{\mu} + B\hat{\nu}$.

Pour alléger les notations, posons $M = \hat{\mu}$ et $N = \hat{\nu}$. Nous allons recouvrir $\mathbb{C}^2$ par 5 ouverts $\Omega_1, \ldots, \Omega_5$ définis respectivement par

$$\Omega_1 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 ; |\mathrm{Im}\, z| < T+1 \quad \text{et} \quad |\mathrm{Im}\, w| < T+1\}$$

$$\Omega_2 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 ; \mathrm{Im}\, w > T\}$$

$$\Omega_3 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 ; \mathrm{Im}\, w < -T\}$$

$$\Omega_4 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 ; |\mathrm{Im}\, w| < T \text{ et } \mathrm{Im}\, z < -T\}$$

et $$\Omega_5 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 ; |\mathrm{Im}\, w| < T \text{ et } \mathrm{Im}\, z > T\}$$

où T est défini par le corollaire du lemme 2.

Désignons par $E'(\Omega_j)$ l'algèbre des fonctions holomorphes sur Ω_j et y vérifiant une inégalité de la forme $|f(z,w)| \leq C(1+|z|+|w|)^q \exp[C(|\mathcal{J}m\, z| + |\mathcal{J}m\, w|)]$.

Nous nous proposons de construire, pour chaque j, un couple (A_j,B_j) de deux fonctions de $E'(\Omega_j)$ telles que $F = A_jM + B_jN$. Ensuite nous ajusterons ces cinq couples.

Dans la construction du couple (A_j,B_j), les cas $j=1$ et $j>1$ sont complètement différents. En effet, à cause du choix de T, Ω_1 contient tous les zéros communs à M et N. De sorte que l'hypothèse $F \in \mathcal{O}_p M + \mathcal{O}_p N$, $\forall\, p \in \Omega_1$, jouera un rôle important.

En revanche pour $j>1$, seules les propriétés de croissance à l'infini de F sur Ω_j interviendront ; la preuve de $F = A_jM + B_jN$ en sera naturellement simplifiée.

Décomposition $F = A_1M + B_1N$ sur Ω_1 .

On appelle P^ε l'ensemble des couples (z,w) tels que $|x| \leq \pi+\varepsilon$, $|y| \leq T+\varepsilon$, $|\xi| \leq \pi+\varepsilon$, $|\eta| \leq T+\varepsilon$ et, pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$, $P^\varepsilon_{k,\ell}$ sera le translaté par $(2k\pi,\ 2\ell\pi)$ de P^ε.

Si $0 \leq \varepsilon < \varepsilon'$, posons $P = P^\varepsilon$ et $\widetilde{P} = P^{\varepsilon'}$. On peut appliquer le lemme 5 à tout couple $(U,V) \in \mathcal{K}$ et les conclusions seront encore valables pour tout $(U_1,V_1) \in \mathcal{K}$ suffisamment voisin de (U,V). La compacité de $\mathcal{K}$ entraîne le corollaire suivant du lemme 5.

Lemme 6 : Si $0 \leq \varepsilon < \varepsilon'$, il existe une constante C ayant la propriété suivante. Pour tout couple $(U,V) \in \mathcal{K}$ et toute fonction $F \in \mathcal{O}(P^{\varepsilon'})U + \mathcal{O}(P^{\varepsilon'})V$, il existe un couple (A,B) de deux fonctions analytiques au voisinage de P^ε telles que $F = AU + BV$ au voisinage de P^ε et que

$$\sup_{P^\varepsilon}(|A| + |B|) \leq C \sup_{P^{\varepsilon'}} |F|.$$

De plus si $A \in \mathcal{O}(P^{\varepsilon'})$, $B \in \mathcal{O}(P^{\varepsilon'})$ et $AU + BV = 0$ pour un certain couple $(U,V) \in \mathcal{K}$, il existe une fonction $H \in \mathcal{O}(P^\varepsilon)$ telle que $A = -HV$, $B = HU$ au voisinage de P^ε et que $\sup_{P^\varepsilon} |H| \leq C(\sup_{P^{\varepsilon'}} |A| + \sup_{P^{\varepsilon'}} |B|)$.

Revenons à la preuve de la décomposition $F = A_1M + B_1N$. Tout d'abord nous allons introduire un facteur de convergence pour corriger le comportement à l'infini de F sur Ω_1. On sait que

$|F(z,w)| \leq C(1+|z|+|w|)^q \exp[C(|\mathcal{I}m\, z| + |\mathcal{I}m\, w|)]$ et, sur Ω_1, $F(z,w)$ à une croissance polynomiale. Posons

$G(z,w) = \dfrac{F(z,w)}{(z+2iT)^m (w+2iT)^m}$. La fonction $G(z,w)$ est holomorphe dans la bande $|\mathcal{I}m\, z| < T$, $|\mathcal{I}m\, w| < T$ et l'on a si $0 \leq \varepsilon \leq 1$,

$$(12) \qquad \sum_{(k,\Omega)\in\mathbb{Z}^2} \sup_{P^{\varepsilon}_{k,\ell}} |G(z,w)| < +\infty \ .$$

On part de la valeur $\varepsilon = 1$. Les applications successives (mais en nombre fini) du lemme 5 nous forcerons à diminuer un certain nombre de fois ε. En dernier lieu, on pourra remplacer ε par 0.

Il est naturellement équivalent d'étudier $G(z,w)$ sur $P^{\varepsilon}_{k,\ell}$ ou $G(z+2k\pi,\ w+2\ell\pi)$ sur le pavé fixe P^{ε}. Grâce à cette remarque, le lemme 6 montre qu'il y a une constante C telle que $\forall (k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$, il existe deux fonctions $A_{k,\ell}(z,w)$ et $B_{k,\ell}(z,w)$, holomorphes au voisinage de $P^{\eta}_{k,\ell}$, $\eta = \varepsilon/2$, et telles que

$$G = A_{k,\ell} M + B_{k,\ell} N \text{ au voisinage de } P^{\eta}_{k,\ell}$$

$$\sup_{P^{\eta}_{k,\ell}} (|A_{k,\ell}| + |B_{k,\ell}|) \leq C \sup_{P^{\varepsilon}_{k,\ell}} |G| = \omega_{k,\ell} \ .$$

Nous allons d'abord modifier $A_{k,\ell}$ et $B_{k,\ell}$ pour que ces fonctions ne dépendent plus de k (quitte à remplacer η par $\eta/2$).

Posons $Q^{\eta}_{k,\ell} = P^{\eta}_{k,\ell} \cap P^{\eta}_{k+1,\ell}$. On a, au voisinage de $Q^{\eta}_{k,\ell}$, $A_{k,\ell} M + B_{k,\ell} N = A_{k+1,\ell} M + B_{k+1,\ell}$. Posons $\varepsilon = \eta/2$. Le lemme 6 entraîne

$$A_{k+1,\ell} - A_{k,\ell} = H_{k,\ell} N$$

$$-B_{k+1,\ell} + B_{k,\ell} = H_{k,\ell} M \ ,$$

avec $\sup_{Q^{\varepsilon}_{k,\ell}} |H_{k,\ell}| \leq C \sup_{P^{\eta}_{k,\ell} \cup P^{\eta}_{k+1,\ell}} |G| \leq C\, \omega_{k,\ell} + C\, \omega_{k+1,\ell} = \tilde{\omega}_{k,\ell}$.

Quitte à remplacer de nouveau ε par $\varepsilon/2$, on peut écrire $H_{k,\ell} = H^{q}_{k,\ell} - H^{d}_{k,\ell}$

où $H^q_{k,\ell}$ est holomorphe au voisinage de la réunion des $P^\varepsilon_{k',\ell}$, $k' \le k$ et $H^d_{k,\ell}$ est holomorphe au voisinage de la réunion des $P^\varepsilon_{k',\ell}$, $k' \ge k+1$. De plus $\sup_{P^\varepsilon_{k',\ell}} |H^q_{k,\ell}| \le C\,\tilde{\omega}_{k,\ell}$, $\sup_{P^\varepsilon_{k',\ell}} |H^d_{k,\ell}| \le C\,\tilde{\omega}_{k,\ell}$ pour respectivement $k' \le k$ ou $k' \ge k+1$.

Enfin on pose

$$a_\ell = A_{k,\ell} + N\Big(\sum_{k' \ge k} H_{k',\ell} - \sum_{k'<k} H^d_{k',\ell}\Big)$$

et

$$b_\ell = B_{k,\ell} - M\Big(\sum_{k' \ge k} H_{k',\ell} - \sum_{k'<k} H^d_{k',\ell}\Big).$$

Les sommes écrites ont un sens grâce à la convergence de $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \omega_{k,\ell}$. On vérifie sans peine que les fonctions a_ℓ et b_ℓ obtenues ne dépendent pas de k ; si $\varepsilon > 0$ est assez petit, ces fonctions sont holomorphes sur $\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} P^\varepsilon_{k,\ell}$. Enfin, on a, sur cet ensemble, $G = a_\ell M + b_\ell N$ et $\sup_{P^\varepsilon_{k,\ell}} (|a_\ell| + |b_\ell|) \le C \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \omega_{k,\ell}$.

Il ne reste plus qu'à échanger les rôles de z et w et à recoller les divers couples (a_ℓ, b_ℓ), $\ell \in \mathbb{Z}$. On obtient ainsi une décomposition globale $G = aM + bN$ dans laquelle a et b sont holomorphes et bornées sur Ω_1. Il en résulte que $F = A_1 M + B_1 N$ où A_1 et B_1 appartiennent à $E'(\Omega_1)$.

<u>Décomposition</u> : $F = A_j M + B_j N$, $j \ge 2$, dans Ω_j : nous nous bornerons à examiner le cas $j = 2$, qui est typique. Soit $\alpha = (\alpha_0 + i\alpha_1,\ \alpha_2 + i\alpha_3)$ tel que $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, $0 \le j \le 3$, $\alpha_3 \ge T$. On désignera par R_α l'hypercube $|x - \alpha_0| \le 1$, $|y - \alpha_1| \le 1$, $|\xi - \alpha_2| \le 1$, $|\eta - \alpha_3| \le 1$. Le corollaire du lemme 2 entraîne :

$$\forall (z,w) \in R_\alpha,\ \exists (c_\alpha, d_\alpha)(z,w) \in F ,$$

$$|(c_\alpha, Z^{M+d_\alpha}, Z^N)(z,w)| \ge \rho_1 \exp(-\rho_2(|\mathrm{Im}\, z| + |\mathrm{Im}\, w|)) .$$

En utilisant, au voisinage de (z,w), la décomposition :

$$F(z,w) = \frac{F(z,w)\, c_{\alpha,} Z^{M(z,w)} + d_{\alpha,} Z^{N(z,w)}}{c_{\alpha,} Z^{M} + d_{\alpha,} Z^{N}}$$

et la méthode de recollement déjà citée, on obtient, dans R_α, la décomposition $F(z,w) = A^\alpha(z,w)M + B^\alpha(z,w)N$, et l'on a :

$$(13) \qquad |A^\alpha(z,w)| + |B^\alpha(z,w)| \leq C_1(1 + |z| + |w|)^{q_1} \exp C\,(|\mathcal{I}m\, z| + |\mathcal{I}m\, w|).$$

Le programme de la construction de A_2 et de B_2 est de rendre progressivement (A^α, B^α) indépendants de α_o, puis de α_1, puis de α_2, et enfin de α_3. A chaque étape, nous serons obligés de remplacer C_1 et q_1 dans (13) par des constantes plus grandes. Au bout de six étapes nécessaires (il faudra distinguer $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_1 \leq 0$, etc...), on aura $A_2 \in E'(\Omega_2)$ et $B_2 \in E'(\Omega_2)$. Nous ne décrirons que les deux premières étapes de ce programme .

Première étape : On fixe $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in Z^3$, $\alpha_3 > T$, et l'on veut rendre indépendants de α_o les couples (A^α, B^α), tout en conservant (13) et $F = A^\alpha M + B^\alpha N$.

La méthode est semblable à celle utilisée pour la construction de A_1 et B_1.

Supposons que $\alpha = (\alpha_o, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et $\alpha' = (\alpha_o + 1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Sur $R_\alpha \cap R_{\alpha'}$, on a $A^\alpha M + B^\alpha N = A^{\alpha'} M + B^{\alpha'} N$; d'où

$$H_\alpha(z) = \frac{A^\alpha - A^{\alpha'}}{N} = \frac{B^{\alpha'} - B^\alpha}{M} = \frac{c_{\alpha,} Z^{(B^{\alpha'} - B^\alpha)} + d_{\alpha,} Z^{(A^\alpha - A^{\alpha'})}}{c_{\alpha,} Z^{M} + d_{\alpha,} Z^{N}} .$$

Cette dernière expression montre que $|H^\alpha|$ vérifie une inégalité du type (13) mais où figurent les constantes C_2 et q_2 (au lieu de C_1 et q_1).

Comme dans la preuve du lemme 5, nous poserons $P_\alpha = R_\alpha \cap R'_\alpha = P'_\alpha \times P''_\alpha$; $(z,w) \in P_\alpha$ si et seulement si $z \in P'_\alpha$ et $w \in P''_\alpha$. Nous définissons G_α comme l'intersection du bord de P'_α et de $x \leq \alpha_o + 1/2$; D_α est l'intersection de $\partial P'_\alpha$ et de $x \geq \alpha_o + 1/2$. Les contours G_α et D_α sont contenus dans le plan complexe des z.

Posons $m = q_2 + 2$ et $\varphi(z) = (z - i(\alpha_1 + 2))^m$. Définissons si $x \leq \alpha_o + 1 - \varepsilon$, $|y - \alpha_1| \leq 1 - \varepsilon$, $|\xi - \alpha_2| \leq 1$ et $|\eta - \alpha_3| \leq 1$,

$$H_g^\alpha(z,w) = \frac{\varphi(z)}{2\pi i}\int_{D_\alpha}\frac{H^\alpha(\zeta,w)}{(\zeta-z)\varphi(\zeta)}\,d\zeta$$

et, de même si $x \geq \alpha_o + \varepsilon$, les autres conditions étant les mêmes,

$$H_d^\alpha(z,w) = \frac{\varphi(z)}{2\pi i}\int_{G_\alpha}\frac{H^\alpha(\zeta,w)}{(\zeta-z)\varphi(\zeta)}\,d\zeta\ .$$

Grâce au choix de m, on peut poser

$$a^\alpha(z,w) = A^\alpha(z,w) + \Big(\sum_{\beta_o \geq \alpha_o} H_g^\beta - \sum_{\beta_o < \alpha_o} H_d^\beta\Big)N$$

(14)

$$b^\alpha(z,w) = B^\alpha(z,w) - \Big(\sum_{\beta_o \geq \alpha_o} H_g^\beta - \sum_{\beta_o < \alpha_o} H_d^\beta\Big)M\ ;$$

Les sommes figurant aux seconds membres de (14) portent sur $\beta = (\beta_o,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ où $\beta_o \in \mathbb{Z}$. La convergence des seconds membres de (14) est assurée par le choix de m. Enfin

$|a^\alpha(z,w)| + |b^\alpha(z,w)| \leq C_3(1+|z|+|w|)^{q_3}\exp\big[C_3(|\mathrm{Im}\, z| + |\mathrm{Im}\, w|)\big]$. En outre a^α et b^α ne dépendent plus de α_o et $F = a^\alpha M + b^\alpha N$ sur la réunion des R_β^ε, $\beta = (\beta_o,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in \mathbb{Z}^4$.

<u>Seconde étape</u> : Il s'agit de transformer les couples (a^α,b^α) construits précédemment pour supprimer la dépendance en α_1, tout en conservant les autres propriétés.

La méthode est une transcription de celle utilisée dans la première étape. On s'occupe d'abord des $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $\alpha_1 \geq 0$. Le pavé R_α^ε est remplacé par la bande B_α^ε définie par $|y-\alpha_1| \leq 1-\varepsilon$, $|\xi-\alpha_2| \leq 1-\varepsilon$ et $|\eta-\alpha_3| \leq 1-\varepsilon$. Enfin on introduit un facteur de convergence du type $e^{im\,z}(i+z)^{-m}$ où $m \in N$ est assez grand.

Les contours G_α et D_α sont remplacés par les droites $y = \alpha_1 + 1 - \varepsilon$ et $y = \alpha_1 + \varepsilon$. On pose $\alpha' = (\alpha_1 + 1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$.

Dans $B_\alpha^\varepsilon \cap B_{\alpha'}^\varepsilon$, on a, si $(z,w) \in R_\beta$, $\beta = (\beta_o,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,

$$H^\alpha(Z) = \frac{a^\alpha - a^{\alpha'}}{N} = \frac{b^{\alpha'} - b^\alpha}{M} = \frac{c_{\beta,Z}(b^{\alpha'}-b^\alpha) + d_{\beta,Z}(a^\alpha - a^{\alpha'})}{c_{\beta,Z}M + d_{\beta,Z}N}\ .$$

Cette dernière égalité entraîne pour $|H^\alpha(z,w)|$ une majoration de la forme

$$|H^\alpha(z,w)| \leq C_4(1+|z|+|w|)^{q_4}\exp[C_4(|\mathrm{Im}\, z|+|\mathrm{Im}\, w|)] \quad (15)$$

On écrit alors, avec $\varphi(z) = e^{im z}(i+z)^m$, $m \in \mathbf{N}$, $m \geq C_4 + q_4 + 2$,

$$H^\alpha(z,w) = \frac{\varphi(z)}{2\pi i}\int_{y=\alpha_1+\varepsilon} \frac{H^\alpha(\zeta,w)}{\zeta - z}\,\frac{d\zeta}{\varphi(\zeta)}$$

$$-\frac{\varphi(z)}{2\pi i}\int_{y=\alpha_1+1-\varepsilon} \frac{H^\alpha(\zeta,w)}{\zeta-z}\,\frac{d\zeta}{\varphi(\zeta)} = H^\alpha_+(z,w) - H^\alpha_-(z,w).$$

Les fonctions $H^\alpha_+(z,w)$ (resp. $H^\alpha_-(z,w)$) sont holomorphes au voisinage de $y \geq \alpha_1 + 2\varepsilon$, $|\zeta - \alpha_2| \leq 1$, $|\eta - \alpha_3| \leq 1$ (resp. $y \leq \alpha_1 + 1 - 2\varepsilon$, $|\xi - \alpha_2| \leq 1$, $|\eta - \alpha_3| \leq 1$). On termine alors comme dans la première étape.

Les étapes successives sont semblables et nous ne les décrirons pas. Le lecteur souhaitant plus de détails est invité à consulter le livre d'Ehrenpreis [3].

Bibliographie

[1] Delsarte, J. Théorie des fonctions moyenne-périodique de deux variables. Ann. Math. 72 (1960), 121-178.

[2] Douady, A. Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné. Ann. Inst. Fourier 16 (1966), 1-95.

[3] Ehrenpreis, L. Fourier analysis in several complex variables. Tracts in Math. 17. Wiley-Intersc. (1970).

[4] Gurevich, D. I. Counterexamples to a problem of L. Schwartz, Funct. Analysis and its applications (traduit du russe). Russian original, Vol. 9, no 2, 1975, Traduction anglaise, 93-182, 1975, p.116-120.

[5] Meyer, Y. Remarques sur un théorème de J. Delsarte. Analyse Harmonique, Orsay, 1974.

B - ETUDE DU COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS DE SYSTEMES D'EQUATIONS DE CONVOLUTION ENVISAGES PAR J. DELSARTE.

B.1 Introduction

L'étude du comportement asymptotique des solutions continues ou appartenant à L^p_{loc} d'une équation de convolution $\mu * f = 0$, où μ désigne une mesure à support fini, a fait l'objet d'un travail de Y. Meyer [10].

Nous nous proposons d'adapter les méthodes utilisées à l'étude du comportement asymptotique des solutions d'un système d'équations de convolution :

$$(1) \qquad \begin{cases} \mu_1 * f = 0 \\ \mu_2 * f = 0 \end{cases}$$

$$\mu_1 = a_1\delta_{0,0} + b_1\delta_{1,0} + c_1\delta_{0,1} + d_1\delta_{1,1} + \sum_{(a,b)\in J} c^{(1)}_{a,b}\,\delta_{a,b}$$

$$\mu_2 = a_2\delta_{0,0} + b_2\delta_{1,0} + c_2\delta_{0,1} + d_2\delta_{1,1} + \sum_{(a,b)\in J} c^{(2)}_{a,b}\,\delta_{a,b}$$

(où J désigne une partie finie de $]0,1[\times]0,1[$) .

Sous des hypothèses déjà introduites par Delsarte [9], nous verrons (§ 2) comment munir l'espace des solutions continues ou L^p_{loc} de (1) d'une structure d'espace de Banach. Se dégagera de cette étude la notion de "domaine fondamental" attaché à un tel système.

Nous étudierons ensuite (§ 3) l'algèbre de Banach des opérateurs invariants par translation de l'espace des solutions continues de (1). Cette étude fera apparaître le caractère local de cette algèbre.

Elle permettra (§ 4) d'étudier le comportement en norme L^p des solutions localement intégrables de (1).

Nous verrons ensuite (§ 5) comment lier dans certains cas la nature du comportement en norme L^2 des solutions de (1) et la description du spectre du système, c'est-à-dire de l'ensemble des couples $\{(z,w) \in \mathbb{C}^2,\ \hat{\mu}_1(z,w) = \hat{\mu}_2(z,w) = 0\}$.

B.2 Etude de l'espace des solutions continues ou localement intégrables de (1).

Nous nous donnons deux mesures μ_1 et μ_2 portées par $[0,1] \times [0,1]$ du type (1).

Nous supposons réalisées les conditions de Delsarte suivantes :

$$(2) \qquad (a_1b_2 - a_2b_1).(b_1d_2 - b_2d_1).(c_1d_2 - c_2d_1).(a_1c_2 - a_2c_1) \neq 0$$

Soit Γ le sous-groupe de $\mathbb{R}^2$ engendré par :

$$(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ \{(\alpha,\beta),(\alpha,\beta) \in J\}.$$

On supposera $\Gamma = \mathbb{Z}(\alpha_1,\beta_1) \oplus \ldots \quad \ldots \oplus \mathbb{Z}(\alpha_N,\beta_N)$ dense dans $\mathbb{R}^2$, ainsi que :

$$\begin{cases} (\alpha_{N-1},\beta_{N-1}) = (1,0) \\ (\alpha_N,\beta_N) = (0,1) \end{cases}$$

Le théorème suivant a été établi par Yves Meyer [9].

Théorème 1 : Toute fonction continue sur $D = [0,2] \times [0,1]$, telle que : $\forall\ x \in [1,2]$, $\mu_1 * f(x,1) = \mu_2 * f(x,1) = 0$ se prolonge de manière unique en une solution continue sur $\mathbb{R}^2$ du système (1), lorsque les conditions (2) sont réalisées.

Désignons par E le sous-espace de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ formé des solutions continues de (1).

E est muni naturellement d'une structure d'espace de Banach, pour la norme :

$$\|f\|_E = \sup_{[0,2] \times [0,1]} |f(x,y)|$$

Cela résulte du théorème 1.

Soit $\mathcal{M}$ l'algèbre des mesures atomiques, à support compact portées par Γ. Nous allons munir l'algèbre des opérateurs de E définis par convolution avec une mesure ν appartenant à $\mathcal{M}$ d'une structure d'algèbre de Banach. Cela résultera du théorème suivant :

Théorème 2 : Soit T un opérateur de E défini par convolution avec une mesure $\nu \in \mathcal{M}$.

$\exists\ \sigma \in \mathcal{M}$, portée par $\check{D}'$, unique, telle que $\forall f \in E$, $T(f) = \sigma * f$.
D'autre part $\|\sigma\| \sim \|T\|$ et $\exists \rho_1, \rho_2 \in \mathcal{M}$, $\nu - \sigma = \rho_1 * \mu_1 + \rho_2 * \mu_2$

$(D' = [0,2] \times [0,1[\setminus (2,0))$.

Lemme 2.1 : Soit $\nu \in \mathcal{M}$, T_ν l'opérateur de E associé, $\exists\ \sigma \in M(\mathbb{R}^2)$, Supp $\sigma \subset \check{D}'_1$, $\|\sigma\| \sim \|T_\nu\|$ telle que $\forall f \in E$, $T_\nu(f) = \sigma * f$.

Soit $X = \{f \in \mathcal{C}(D),\ \forall x \in [1,2],\ \mu_1 * f(x,1) = \mu_2 * f(x,1) = 0\}$.
Un élément $f \in X$ se prolonge en $\tilde{f} \in E$ (cf. Theorème 1) . On associe à la mesure ν la forme linéaire :

$$f \longmapsto T_\nu \tilde{f}(0,0) \ , \ f \in X \ .$$

D'après Hahn Banach, $\exists\ \sigma_o$, portée par $\check{D}$, telle que :

$$\|\sigma_o\| \leq \|T_\nu\|$$

$$\forall f \in X \ , \ \nu * \tilde{f}(0,0) = T_\nu(\tilde{f})(0,0) = \iint_D f \, d\check{\sigma}_o \ .$$

Posons $\sigma_o = \sigma'_o + \sigma''_o$ où σ'_o est portée par $\check{D}' \cup (-2,0)$, σ''_o étant portée par $[-2,0] \times \{-1\}$.

Si ρ désigne une mesure portée par $[-2,-1] \times \{-1\}$, en écrivant :

$$\forall i = 1,2,\ \mu_i * \rho = a_i \rho + b_i \rho * \delta_{1,0} + c_i \rho * \delta_{0,1} + d_i \rho * \delta_{1,1} + \sum_J c^{(i)}_{a,b} \rho * \delta_{a,b} \ , \ i = 1, 2,$$

On exprime ρ et $\rho * \delta_{1,0}$, à l'aide de $\mu_1 * \rho$, $\mu_2 * \rho$, et de mesures portées par $\check{D}' \cup (-2,0)$.

On déduit de ce calcul l'existence de σ_1 portée par $\check{D}' \cup (-2,0)$, telle que :

$$\left| \begin{array}{l} \|\sigma_1\| \leq C \| T_\nu \| \\ \\ \forall f \in E,\ T_\nu(f) = T_{\sigma_1}(f) = \sigma_1 * f \ . \end{array} \right.$$

On décompose à nouveau $\sigma_1 = \sigma_1' + \sigma_1''$, où σ_1' est portée par $\check{D}'$, σ_1'' portée par $(-2,0)$.

En remarquant :

$$\delta_{-1,-1} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \begin{vmatrix} \mu_1 * \delta_{-1,-1} - c_1 \delta_{-1,0} - d_1 \delta_{0,0} - \sum_J c^{(1)}_{a,b} \delta_{a-1,b-1} & , b_1 \\ \\ \mu_2 * \delta_{-1,-1} - c_2 \delta_{-1,0} - d_2 \delta_{0,0} - \sum_J c^{(2)}_{a,b} \delta_{a-1,b-1} & , b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \begin{vmatrix} a_1 & , \mu_1 * \delta_{-2,-1} - c_1 \delta_{-2,0} - d_1 \delta_{-1,0} - \sum_J c^{(1)}_{a,b} \delta_{a-2,b-1} \\ \\ a_2 & , \mu_2 * \delta_{-2,-1} - c_2 \delta_{-2,0} - d_2 \delta_{-1,0} - \sum_J c^{(2)}_{a,b} \delta_{a-2,b-1} \end{vmatrix}$$

On en déduit :

$$\delta_{-2,0} = \mu_1 * \sigma_1 + \mu_2 * \sigma_2 + \sigma$$

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma \in \mathcal{M}\ ,\ \sigma \text{ étant portée par } \check{D}'$$

Si $\sigma_1'' = k_1 \delta_{-2,0}$, on prendra $\sigma = \sigma_1' + k_1 \sigma$. ∎

Lemme 2.2 : Soit μ une mesure portée par D'. On suppose $\forall f \in E,\ \mu * f = 0$ Alors $\mu = 0$.

$\forall \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$, $\mu_1 * \varphi = \mu_2 * \varphi = 0 \Rightarrow \check{\mu}(\varphi) = \mu * \varphi(0,0) = 0$.

Donc si $\varphi \in \mathcal{C}(D)$ vérifie : $\forall x \in [1,2]$, $\mu_1 * \varphi(x,1) = \mu_2 * \varphi(x,1) = 0$, alors $\check{\mu}(\varphi) = 0$.

Il résulte de cela que $\check{\mu}$ est nécessairement portée par :

$$([0,1[\times \{0\}) \cup \bigcup_b ([0,2] \times \{1-b\})$$

Les conditions $\mu_1 * \varphi(x,1) = \mu_2 * \varphi(x,1) = 0 \quad \forall x \in [1,2]$ ne font en effet intervenir que les valeurs de φ sur ces segments de droite.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}(D)$, $\varphi = 0$ sur $[2-\varepsilon,2] \times \{0\}$. Les calculs faits lors de la preuve du lemme 2.1 assurent l'existence d'une constante C_φ telle que la fonction ψ_2^η définie sur $([0,2] \times \{0\}) \cup \bigcup_b ([0,2] \times \{1-b\})$ par :

$$\left| \begin{array}{l} \psi_2^\eta(x) = \varphi(x) \quad \text{sur } [0,2] \times \{1-b\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\eta < \varepsilon) \\ \psi_2^\eta(x) = \varphi(x) \quad \text{sur } [0,2-\eta] \times \{0\} \ , \ \psi_2^\eta(2,0) = C_\varphi \end{array} \right.$$

se prolonge à D en une restriction d'élément de E. Si l'on prend ψ_2^η telle que sur $[2-\eta,2] \times \{0\}$ $|\psi_2^\eta| \leq C_\varphi$ et que l'on fasse tendre η vers 0 ,

$$\check{\mu}(\psi_2^\eta) = 0 \quad \forall \eta \quad \Rightarrow \quad \check{\mu}(\varphi) = 0 \ . \quad \blacksquare$$

Lemme 2.3 : Soit $\nu \in \mathcal{M}$, σ portée par $\check{D}' \cap \Gamma$, atomique, ρ_1, $\rho_2 \in \mathcal{M}$ telles que $\nu = \sigma + \mu_1 * \rho_1 + \mu_2 * \rho_2$.

Soit ν_ε une mesure portée par $\Gamma \cap \{-2 \leq x \leq -1, \ -1-\varepsilon \leq y \leq -1\}$.

$$\mu_i * \nu_\varepsilon = a_i \nu_\varepsilon + b_i \nu_\varepsilon * \delta_{1,0} + c_i \nu_\varepsilon * \delta_{0,1} + d_i \nu_\varepsilon * \delta_{1,1} +$$

$$+ \sum_{(a,b) \in J} c_{a,b}^{(i)} \nu_\varepsilon * \delta_{a,b}$$

$(i = 1,2)$.

On exprime ainsi ν_ε et $\nu_\varepsilon * \delta_{1,0}$, si ε est choisi assez petit, sous la forme, modulo $\mu_1 * \mathcal{M} + \mu_2 * \mathcal{M}$, de mesures portées par $\check{D}'$. Le lemme est ainsi démontré pour toute mesure ν portée par $\Gamma \cap \{-2 \leq x \leq 0\}$.

Soit maintenant ν_ε portée par $\Gamma \cap \{0 \leq x \leq \varepsilon\}$:

$$\mu_i * \delta_{-1,0} * \nu_\varepsilon = a_i \nu_\varepsilon * \delta_{-1,0} + b_i \nu_\varepsilon + c_i \nu_\varepsilon * \delta_{-1,-1} + d_i \nu_\varepsilon * \delta_{o,1} +$$

$$+ \sum_{(a,b) \in J} c_{a,b}^{(i)} \nu_\varepsilon * \delta_{a-1,b} \qquad (i = 1,2).$$

Si ε est assez petit, on exprime ν_ε, modulo $\mu_1 * \mathcal{M} + \mu_2 * \mathcal{M}$ comme une mesure portée par $\Gamma \cap \{-2 \leq x \leq 0\}$, que l'on ramènera ensuite dans $\check{D}'$. ∎

Lemme 2.4 : Soient ν_1 et $\nu_2 \in \mathcal{M}$. On suppose $\forall f \in E$, $T_{\nu_1}(f) = T_{\nu_2}(f)$. Alors $\exists \rho_1, \rho_2 \in \mathcal{M}$ telles que $\nu_1 - \nu_2 = \rho_1 * \mu_1 + \rho_2 * \mu_2$.

D'après le lemme 2.3, $\exists\, \sigma \in \mathcal{M}$, portée par $\check{D}'$, $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{M}$

$$\nu_1 - \nu_2 = \sigma + \rho_1 * \mu_1 + \rho_2 * \mu_2$$

Or $\forall f \in E$, $(\nu_1 - \nu_2) * f = 0$. Donc $\forall f \in E$, $\sigma * f = 0$. Comme σ est portée par $\check{D}'$, $\sigma = 0$ (lemme 2). ∎

Le théorème 2 résulte des lemmes 2.1, 2.2, 2.3, 2.4.

On désignera par B l'algèbre des opérateurs de E définis par convolution avec une mesure de $\mathcal{M}$.

En munissant B de la norme $\|T\|_B = \|\sigma\|$ (σ liée à T par le théorème 2). On fait de B une algèbre de Banach, isomorphe à

$$\mathcal{M} / \mu_1 * \mathcal{M} + \mu_2 * \mathcal{M}$$

(la topologie de $\mathcal{M}$ étant la topologie limite inductive des topologies d'espaces normés des $\mathcal{M}_k = \{\mu \in \mathcal{M},\ \mathrm{Supp}\,\mu \subset [-k,k]^2\ ,\ k \in \mathbb{N}^*\}$)

Décrivons le spectre de l'algèbre B :

Soit χ un homomorphisme unitaire continu de $\mathcal{M}/\mu_1 * \mathcal{M} + \mu_2 * \mathcal{M} \mapsto \mathbb{C}$.

Relevons χ en un homomorphisme ξ, continu de $\mathcal{M} \mapsto \mathbb{C}$

$$\forall i = 1, \ldots, N \quad \xi(\delta_{\alpha_i, \beta_i}) = z_i \in \mathbb{C}^* \quad |z_i| = e^{y_i}$$

D'après la continuité de ξ, $\exists\, c_o,\ c_1 \in \mathbb{R}^+$

$$\forall (p_1, p_2, \ldots, p_N) \in \mathbb{Z}^N\ ,\ \|p_1(\alpha_1, \beta_1) + \ldots + p_N(\alpha_N, \beta_N)\| \leq c_o$$

$$\Rightarrow |p_1 y_1 + p_2 y_2 + \ldots + p_N y_N| \leq c_1 \ .$$

La densité de Γ implique l'existence de $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$|z_1| = e^{\alpha_1 u + \beta_1 v}, \ldots, |z_N| = e^{\alpha_N u + \beta_N v}$$

Nous désignerons par G le sous-groupe de $(\mathbb{C}^*)^N$:

$$G = \{(z_1,\ldots,z_N) \in (\mathbb{C}^*)^N,\ \exists (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ \forall i = 1,\ldots,N,\ |z_i| = e^{\alpha_i u + \beta_i v}\}$$

Proposition 3 : Soit $\Omega \subset \mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{T}) = \{\omega \in \mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{T}),\ \omega(\alpha_{N-1},\beta_{N-1}) = \omega(\alpha_N,\beta_N) = 1\}$. L'application $J_o : \Omega \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to G$, $(\omega,z,w) \mapsto (\omega,z,w) \mapsto (\omega(\alpha_1,\beta_1)e^{-i(\alpha_1 z + \beta_1 w)}, \ldots, \omega(\alpha_N,\beta_N)\, e^{-i(\alpha_N z + \beta_N w)})$ est un homomorphisme surjectif de $\Omega \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ dans G. C'est de plus un homéomorphisme local.

Il est clair que J_o est un homomorphisme de $\Omega \times \mathbb{C}^2 \to G$. Soit $(z_1,\ldots,z_N) \in G$. Pour trouver (ω,z,w) tel que $J_o(\omega,z,w) = (z_1,z_2,\ldots,z_N)$, on choisit z et w tels que :

$$\begin{cases} \alpha_N\, \mathrm{Im}\, z + \beta_N\, \mathrm{Im}\, w = u\alpha_N + v\beta_N \\ \alpha_{N-1}\, \mathrm{Im}\, z + \beta_{N-1}\, \mathrm{Im}\, w = u\alpha_{N-1} + v\beta_{N-1} \end{cases}, \text{ soit } \mathrm{Im}\, z = u,\ \mathrm{Im}\, w = v$$

On détermine ensuite $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Re}\, w$, puis $\omega(\alpha_1,\beta_1),\ldots,\omega(\alpha_{N-2},\beta_{N-2})$. ∎

Si $\nu \in \mathcal{M}$, $\nu = \sum_{\|p_1(\alpha_1,\beta_1)+\ldots+p_N(\alpha_N,\beta_N)\| \le \ell} c_{p_1\cdots p_N}\, \delta_{p_1(\alpha_1,\beta_1)+\ldots+p_N(\alpha_N,\beta_N)}$

On notera $\hat{\nu}(z_1,\ldots,z_N) = \sum_{\|p_1(\alpha_1,\beta_1)+\ldots+p_N(\alpha_N,\beta_N)\| \le \ell} c_{p_1\cdots p_N}\, z_1^{p_1}\cdots z_N^{p_N}$

$$\mathrm{sp}\, B \sim K = \{(z_1\ldots z_N) \in G,\ \hat{\mu}_1(z_1\ldots z_N) = \hat{\mu}_2(z_1\ldots z_N) = 0\}$$

B.3 Etude et caractère local de l'algèbre de Banach B

Le sous-groupe Ω de $\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{T})$ peut être identifié à $\mathbb{T}^{N-2}$

Soit $A(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}(\Omega),\ \hat{\varphi} \in \ell^1(\mathbb{Z}^{N-2})\}$, muni de la norme

$$\|\varphi\|_{A(\Omega)} = \|\hat{\varphi}\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^{N-2})}$$

$A(\Omega)$ est ainsi une algèbre de Banach pour le produit usuel. Si V désigne un voisinage compact de $\omega_o \in \Omega$, on notera :

$$A(V) = \{\varphi \in \mathcal{C}(V),\ \exists \tilde{\varphi} \in A(\Omega),\ \tilde{\varphi}_{|V} = \varphi\}$$

$$\|\varphi\|_{A(V)} = \inf_{\substack{\varphi|_V = \varphi \\ \varphi \in A(\Omega)}} \|\tilde{\varphi}\|_{A(\Omega)}$$

Introduisons le faisceau $\mathcal{A}$ de base G, sous faisceau du faisceau des germes de fonctions continues sur G défini comme suit :

(1) L'appartenance à $\mathcal{A}$ est invariante par translation sur G

(2) $f \in \mathcal{A}(\mathbb{1}) \Leftrightarrow$ $\exists F$ définie au voisinage de $\mathbb{1}$, à valeurs complexes, telle que :

[a] f est le germe de F en $\mathbb{1}$

[b] $\exists (\gamma_{p,q})_{p,q \geq 0}$ suite d'éléments de $A(\Omega)$, $\varepsilon > 0$

tels que $\sum_0^\infty \sum_0^\infty \varepsilon^{p+q} \|\gamma_{p,q}\|_{A(\Omega)} < \infty$ et $(F \circ J_o)(\omega,z,w) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty \gamma_{p,q}(\omega) z^p w^q$

au voisinage de $(e,0,0)$.

Désignons par $\mathcal{F}$ le faisceau quotient $\mathcal{A}/\mathcal{G}\mu_1 \cdot \mathcal{A} + \mathcal{G}\mu_2 \cdot \mathcal{A}$. $\mathcal{F}$ est un faisceau de base $K \sim \mathrm{sp}\, B$. Nous ferons dorénavant sur J les deux hypothèses suivantes :

(H_1) $\quad J \neq \emptyset$

(H_2) $\quad (\alpha,\beta) \in J$ et $(\alpha,\beta) \neq (\alpha',\beta') \Rightarrow \alpha \neq \alpha'$ et $\beta \neq \beta'$.
$(\alpha',\beta') \in J$

Le but de ce paragraphe est de munir $\mathcal{F}(K)$ d'une structure d'algèbre de Banach et de l'identifier ensuite à B, de la même manière que dans [10].

Posons : $M_i(\omega,z,w) = (\omega\mu_i)\hat{}(z,w)$ $(\omega\in\Omega,\ z\in\mathbb{C},\ w\in\mathbb{C})$.
Supposons $M_1(e,z,w) = M_2(e,z,w) = 0$ pour $(z,w) = (0,0)$. Il s'agit (cf. [11]) d'un zéro commun isolé. Soit $Q_1,Q_2,\ldots,Q_k$ une base de l'espace vectoriel $\dfrac{\mathcal{O}_2}{M_1(e,z,w)\mathcal{O}_2 + M_2(e,z,w)\mathcal{O}_2}$.

Lemme 3.1 : Soit K un polycylindre privilégié, voisinage de (0,0), pour le couple $(M_1(e,z,w)\ \ M_2(e,z,w))$.
Soit $M\in\mathbb{N}^*$. $\exists V$ voisinage de e dans Ω, $\exists K_M\in\mathbb{R}^+$, telles que :

$\forall P$, $P(\omega,z,w) = \sum_o^M \sum_o^M \alpha_{ij}(\omega) z^i w^j$, où les α_{ij} sont dans $A(\Omega)$,
$\exists \lambda_1,\ldots,\lambda_k \in A(V)$, $U_1,U_2 \in \mathcal{O}_o(V\times K)$ vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{l} \bullet\ \forall i = 1\ldots k,\ \|\lambda_i\|_{A(V)} \le K_M \sum_o^M \sum_o^M \|\alpha_{ij}\|_{A(\Omega)} \\ \bullet\ P(\omega,z,w) = \sum_1^k \lambda_i(\omega)Q_i(z,w) + U_1(\omega,z,w)M_1 + U_2(\omega,z,w)M_2 \quad \text{dans } V\times K \end{array}\right.$$

$(U\in\mathcal{O}_o(V\times K) \Leftrightarrow \exists V_1$ voisinage de V dans Ω, $\exists K_1$ voisinage de K dans $\mathbb{C}^2$ $u: K_1 \mapsto A(V_1)$, analytique, telle que $\forall(\omega,z,w)\in V\times K$, $U(\omega,z,w) = u(z,w)(\omega))$.

Soit $K_1 = D(0,r_1')\times D(0,r_2')$, privilégié, contenant K. On peut définir $M_i(\zeta,z,w)$ pour tout $\zeta\in\mathbb{C}^N$, pour tout (z,w) dans $\mathbb{C}^2$

On notera M_i^ζ : $(z,w)\mapsto M_i(\zeta,z,w)$.

Définissons $f_\zeta \in L(B(K_1)\times B(K_1)\times\mathbb{C}^k,\ B(K_1))$

$$(F,G,\lambda_1\ldots\lambda_k) \mapsto \sum_1^k \lambda_i Q_i + M_1^\zeta F + M_2^\zeta G\ .$$

et $g_\zeta \in L(B(K_1),\ B(K_1)\times B(K_1)\times\mathbb{C}^k)$ par

$$g_\zeta : F \mapsto (-M_2^\zeta F,\ M_1^\zeta F\ ,\ 0,0\ldots 0)\ .$$

$\zeta\mapsto f_\zeta$ est analytique de $\mathbb{C}^N \mapsto L(B(K_1)\times B(K_1)\times\mathbb{C}^k,\ B(K_1))$;

$\zeta\mapsto g_\zeta$ est analytique de $\mathbb{C}^N \mapsto L(B(K_1),B(K_1)\times B(K_1)\times\mathbb{C}^k)$.

Si E désigne un espace de Banach, appelons $E_N = E_{\mathbb{C}^N} = \mathbb{C}^N\times E$ le fibré trivial construit sur E .

E et E' désignant deux espaces de Banach, on appelle homomor-

phisme de fibrés $E_N \mapsto E'_N$ toute application :

$$\mathbb{C}^N \times E \to \mathbb{C}^N \times E'$$

$$(\zeta, X) \mapsto (\zeta, \phi_\zeta(X))$$

où $\zeta \mapsto \phi_\zeta$ est analytique de $\mathbb{C}^N \to L(E,E')$.

Nous avons ici deux homomorphismes f et g de fibrés :

$$(B(K_1))_N \xrightarrow{g} (B(K_1) \times B(K_1) \times \mathbb{C}^k)_N \xrightarrow{f} (B(K_1))_N$$

tels que
① $f \circ g = 0$
② La suite $B(K_1) \xrightarrow{g_e} B(K_1) \times B(K_1) \times \mathbb{C}^k \xrightarrow{f_e} B(K_1)$ où $e = (1,1\ldots1)$ est exacte directe (K étant privilégié).

D'après la proposition 3 du paragraphe 4 de [2], il existe un voisinage W de e dans $\mathbb{C}^N$, des espaces de Banach $\mathbf{F}, \mathbf{F}', \mathbf{F}'', \mathbf{G}, \mathbf{G}', \mathbf{G}''$, deux homomorphismes de fibrés i, i', trois isomorphismes de fibrés j, j', j'' rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
(\mathbf{F} \oplus \mathbf{G})_W & \xrightarrow{i} & (\mathbf{F} \oplus \mathbf{G}')_W & \xleftarrow{i'} & (\mathbf{F}'' \oplus \mathbf{G}'')_W \\
\downarrow j & & \downarrow j' & & \downarrow j'' \\
(B(K))_W & \xrightarrow{g} & (B(K) \times B(K) \times \mathbb{C}^k)_W & \xrightarrow{f} & (B(K))_W
\end{array}$$

avec :
- i' nul sur $\mathbf{F}_W$
  i' induit un isomorphisme de $\mathbf{G}'_W$ sur $\mathbf{F}''_W$
- i nul sur $\mathbf{F}_W$
  i induit un isomorphisme de $\mathbf{G}_W$ sur $\mathbf{F}'_W$

Soit p la projection de $\mathbf{F}'' \oplus \mathbf{G}''$ sur $\mathbf{F}''$. Si $\zeta \in W$, soit $\psi_\zeta \in L(B(K_1), (B(K_1))^2 \times \mathbb{C}^k)$,

où $\psi_\zeta = j'_\zeta \circ v_\zeta^{-1} \circ p \circ j''^{-1}_\zeta$; l'application

$\zeta \mapsto \psi_\zeta$ est analytique de $W \to L(B(K_1), B(K_1) \times B(K_1) \times \mathbb{C}^k)$.

Prenons maintenant $F(z,w) = z^i w^j$, $0 \le i \le M$, $0 \le j \le M$; on a

$$\psi_\zeta(F) = (\lambda_1^{(i,j)}(\zeta), \ldots, \lambda_k^{(i,j)}(\zeta), U_{1,\zeta}^{i,j} , U_{2,\zeta}^{i,j}).$$

On fait alors les deux remarques suivantes :

① Si λ est une fonction analytique au voisinage de $e = (1,1,\ldots,1)$. Il existe un voisinage V de e dans Ω tel que $\omega \mapsto \lambda(\omega)$ définisse un élément de $A(V)$.

② Si $\zeta \mapsto U_\zeta$ est analytique de $\mathring{W}$ dans $B(K_1)$, il existe un voisinage V de e dans Ω tel que

$$(\omega,z,w) \mapsto U_\omega(z,w) \quad \text{soit dans } \mathcal{O}_o(V \times K)$$

On associe ainsi à chaque couple $(i,j) \in \{0,\ldots,M\}^2$ un voisinage $v_{i,j}$ de e dans Ω de manière à ce que les fonctions :

$$* \quad \omega \mapsto \lambda_p^{(i,j)}(\omega) \qquad p = 1 \ldots k \quad \text{soient dans } A(v_{ij}) \ ;$$

$$* \quad \begin{cases} (\omega,z,w) \mapsto U_{1,\omega}^{i,j} \\ (\omega,z,w) \mapsto U_{2,\omega}^{i,j} \end{cases} \quad \text{soient dans } \mathcal{O}_o(v_{i,j} \times K)$$

On prendra pour V l'intersection des $v_{i,j}$ $0 \le i \le M$, $0 \le j \le M$. ∎

Le second lemme est une version du théorème de préparation de Weierstrass :

Lemme 3.2 : On suppose $M_1(e,0,0) = M_2(e,0,0) = 0$ (multiplicité k). M_1 régulière, d'ordre m_1, en z à l'origine. M_2 régulière, d'ordre m_2, en z à l'origine. Si $\zeta \in \mathbb{C}^N$, $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $M_{i,\alpha}(\zeta,z,w) = M_i(\zeta,z,w - \alpha z)$, $(i = 1,2)$.

$\exists r_1 > 0$, $\exists r_2 > 0$, $\forall$ V voisinage de e dans Ω, $\eta_o > 0$ $\exists k' \in \mathbb{N}^*$ tels que :

(1) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| < \eta_o$, $\exists a_1^\alpha,\ldots,a_{m_1}^\alpha$, $b_1^\alpha,\ldots,b_{m_2}^\alpha$ éléments de $\mathcal{O}_o(V \times D(0,r_2))$, $\exists N_1^\alpha$, N_2^α dans $\mathcal{O}_o(V \times D(0,r_1) \times D(0,r_2))$, inversibles, telles que :

$$i = 1,2 \qquad M_{1,\alpha}(\omega,z,w) = (z^{m_1} + a_1^\alpha(\omega,w)z^{m_1-1} + \ldots + a_{m_1}^\alpha(\omega,w))N_1^\alpha(\omega,z,w).$$

$$M_{2,\alpha}(\omega,z,w) = (z^{m_2} + b_1^\alpha(\omega,w)z^{m_2-1} + \ldots + b_{m_2}^\alpha(\omega,w))N_2^\alpha(\omega,z,w).$$

dans $V \times D(0,r_1) \times D(0,r_2)$.

2 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| < \eta_o$, $\exists u_1^\alpha$, $u_2^\alpha,\ldots,u_k^\alpha \in A(V)$, $\exists \delta_1^\alpha \in \mathcal{O}_o(V \times D(0,r_2))$, inversible, telles que :

$$\delta^\alpha(\omega,w) = (w^{k'} + u_1^\alpha(\omega)w^{k'-1} + \ldots + u_{k'}^\alpha(\omega))\delta_1^\alpha(\omega,w) \quad \text{dans } V \times D(0,r_2)$$

où δ^α désigne le résultant des deux polynômes de Weierstrass du (1) .

Dans un premier temps, on applique le théorème de préparation de Weierstrass aux deux fonctions $M_1(e,z,w)$, $M_2(e,z,w)$ régulières en z à l'origine, l'une d'ordre m_1, l'autre d'ordre m_2. (On utilise H_1 et H_2). On est ainsi amené à considérer le polydisque $D(0,R_1) \times D(0,R_2)$ tel que

$$\forall z \in \partial D(0,R_1), \forall w \in \bar{D}(0,R_2) \quad |M_i(e,z,w)| > \varepsilon, \ i = 1,2 .$$

Si η et ρ sont assez petits :

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, z \in \partial D(0,R_1),\ \forall w \in \bar{D}(0,R_2) \\ \forall\, \zeta,\ \zeta \in \Delta(e,\rho),\ \forall \alpha,\ |\alpha| \le \eta \end{array}\right| \quad |M_{i,\alpha}(\zeta,z,w)| > \frac{\varepsilon}{2} \ , \ i = 1,2 .$$

On peut, dans $D(0,R_1) \times D(0,R_2)$ écrire dans ces conditions :

$$M_{1,\alpha}(\zeta,z,w) = (z^{m_1} + a_1^\alpha(\zeta,w)z^{m_1-1} + \ldots + a_{m_1}^\alpha(\zeta,w))N_1^\alpha(\zeta,z,w) .$$

Le calcul de $a_1^\alpha(\zeta,w)$ fait apparaître des intégrales de la forme :

$$(*) \qquad \frac{1}{2i\pi}\int_{|u|=R_1} \frac{\partial M_{1,\alpha}}{\partial u}(\zeta,u,w)\,\frac{u^r}{M_{1,\alpha}(\zeta,u,w)}\,du, \quad r = 1,\ldots,m_1 .$$

Examinons la fonction $f(\zeta,w)$ définie par (*) et analytique au voisinage de $\Delta(e,\rho)\times D(0,R_2)$.

Si p désigne un multiindice ,

$$\left\|\frac{\partial^{|p|}}{\partial\zeta^p} f(e,w)\right\|_{B(D(0,R_2))} \leq C\ \frac{p!}{\rho^{|p|}}\ ,\ \text{où C est indépendant de } \alpha,$$

celui-ci étant choisi tel que $|\alpha|\leq\eta$.

Cela permet de trouver un voisinage $\Delta(e,\rho')$ de e dans $\mathbb{C}^N$ tel que :

$$\forall\ \alpha\in\mathbb{R}\quad |\alpha|\leq\eta$$

$$\forall\ i=1\ldots m_1,\quad \forall\ j=1\ldots m_2$$

$$(\omega,w)\mapsto a_i^\alpha(\omega,w)\quad (\Omega\cap\Delta(e,\rho'))\times D(0,r_2)\mapsto\mathbb{C}$$

$$(\omega,w)\mapsto b_j^\alpha(\omega,w)\quad (\Omega\cap\Delta(e,\rho'))\times D(0,r_2)\mapsto\mathbb{C}$$

$$r_2 < R_2\ ,$$

soient dans $\mathcal{O}_o((\Omega\cap\Delta(e,\rho'))\times D(0,r_2))$.

Restent à étudier les fonctions N_1^α et N_2^α dont on sait qu'elles sont analytiques au voisinage de $\Delta(e,\rho)\times D(0,R_1)\times D(0,R_2)$ et ne s'annulent pas dans ce voisinage .

On a, par exemple :

$$N_1^\alpha(\zeta,z,w) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|u|=R_1} \frac{M_{1,\alpha}(\zeta,u,w)}{u^{m_1}+a_1^\alpha(\zeta,w)u^{m_1-1}+\ldots+a_{m_1}^\alpha(\zeta,w)}\cdot\frac{1}{u-z}\cdot du$$

$(|\alpha|\leq\eta)$. Choisissons $r_1 < R_1$;

$$\left.\begin{array}{l}|z| = r_1\\ \zeta\in\Delta(e,\rho)\\ |w|\leq r_2\end{array}\right\} \Longrightarrow |z^{m_1}+a_1^o(\zeta,w)z^{m_1-1}+\ldots+a_{m_1}^o(\zeta,w)| > \varepsilon' .$$

Or il est clair que :

$$\forall\ \theta>0,\ \exists\ \eta(\theta),\quad |\alpha|<\eta(\theta)\Rightarrow\forall\ i=1\ldots m_1,\ \|a_i^\alpha - a_i^o\|_{B(\Delta(e,\rho)\times D(0,R_2))}<\theta.$$

Donc, si $|\alpha| \leq \eta'$,

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, z,\ |z| = r_1 \\ \forall\, \zeta,\ \zeta \in \Delta(e,\rho) \\ \forall\, W,\ |w| \leq r_2 \end{array}\right\} \quad |z^{m_1} + a_1^{\alpha}(\zeta,w) z^{m_1-1} + \ldots + a_{m_1}^{\alpha}(\zeta,w)| > \frac{\varepsilon'}{2} .$$

Comme précédemment, nous voyons :

$$\left\| \frac{\partial^{|p|}}{\partial \zeta^p} N_1^{\alpha}(e,z,w) \right\|_{B(\bar{D}(0,\frac{R_1}{2}) \times \bar{D}(0,R_2))} \leq p! \frac{2}{r_1} \frac{D}{\rho^{|p|}} ,$$

où D est indépendante de α, pourvu que $|\alpha| \leq \eta'$.

Cela permet de trouver un voisinage $\Delta(e,\rho'')$ de e dans $\mathbb{C}^N$ tel que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $|\alpha| \leq \eta'$, les applications

$$(\omega,z,w) \mapsto N_i^{\alpha}(\omega,z,w) \text{ soient dans } \mathcal{O}_o((\Omega \cap \Delta(e,\rho'')) \times D(0,r_1) \times D(0,r_2))$$

$$(r_1 < \frac{R_1}{2} , \quad r_2 < R_2) .$$

Il faut améliorer r_1, r_2 et V pour obtenir le second point du lemme. Examinons $\delta^o(e,w)$; cette fonction admet 0 comme zéro d'ordre k'à l'origine. Ce zéro est d'ailleurs le seul dans $D(0,r_2)$; on a $k' \leq k$.

Sur $\partial D(0,r_2)$, $|\delta^o(e,w)| \geq \varepsilon'' > 0$; $\exists \eta'' > 0$, $\exists \rho''' > 0$ tels que :

$$\left|\begin{array}{l} \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \quad |\alpha| < \eta'' < \inf(\eta,\eta'), \\ \forall\, \zeta \in \Delta(e,\rho'''), \end{array}\right.$$

$\delta^{\alpha}(\zeta,w)$ admet k' zéros en w dans $\hat{D}(0,r_2)$, tous dans $\hat{D}(0,\frac{r_2}{2})$, et vérifie :

$$\left|\begin{array}{l} \forall w \in \partial D(0,r_2) \\ \forall \zeta \in \Delta(e,\rho''') \\ \forall \alpha, |\alpha| \leq \eta'' \end{array}\right. \qquad |\delta^{\alpha}(\zeta,w)| \geq \frac{\varepsilon'''}{2} .$$

Une nouvelle application du théorème de préparation, identique à la précédente, conduit, modulo une amélioration du choix de r_1, r_2, V, au résultat voulu. ∎

Remarque : Soit $\beta > 0$. En choisissant correctement V et r_2, on peut aussi réaliser :

1) $\forall i = 1,\dots,m_1 \quad \sup_{w \in D(0,r_2)} \|a_i^o(.,w)\|_{A(V)} < \beta$

2) $\forall i = 1,\dots,m_2 \quad \sup_{w \in D(0,r_2)} \|b_i^o(.,w)\|_{A(V)} < \beta$

3) $\forall i = 1,\dots,k' \quad \|u_i^o\|_{A(V)} < \beta$

C'est une conséquence de ce que $a_i^o(e,0) = b_j^o(e,0) = u_\ell^o(e) = 0$ $i=1,\dots,m_1$; $j=1,\dots,m_2$; $\ell = 1,\dots,k'$.

Dans toute la suite, V, $D(0,r_1) = D_1$, $D(0,r_2) = D_2$ seront choisis de manière à ce que soient satisfaits les lemmes 3.1 et 3.2. On désignera par $\Gamma(V \times D_1 \times D_2)$ l'algèbre complétée de $\mathcal{O}_o(V \times D_1 \times D_2)$, pour la norme $\|f(\omega,z,w)\|_{\Gamma(V \times D_1 \times D_2)} = \sup_{(z,w) \in D_1 \times D_2} \|f(.,z,w)\|_{A(V)}$. De même $\Gamma(V \times D_2)$ désigne l'algèbre complétée de $\mathcal{O}_o(V \times D_2)$ pour la norme $\|f(\omega,w)\|_{\Gamma(V \times D_2)} = \sup_{w \in D_2} \|f(.,w)\|_{A(V)}$.

Lemme 3.3 : Posons, dans $V \times D_1 \times D_2$,

$$P_1(\omega,z,w) = z^{m_1} + a_1^o(\omega,w) z^{m_1-1} + \dots + a_{m_1}^o(\omega,w).$$

$$P_2(\omega,z,w) = z^{m_2} + b_1^o(\omega,w) z^{m_2-1} + \dots + b_{m_2}^o(\omega,w).$$

L'algèbre quotient

$$\mathcal{B}(V \times D_1 \times D_2) = \frac{\Gamma(V \times D_1 \times D_2)}{P_1 \cdot \Gamma(V \times D_1 \times D_2) + P_2 \cdot \Gamma(V \times D_1 \times D_2)}$$

est une algèbre de Banach (moyennant une amélioration de V).

Soit $f \in \Gamma(V \times D_1 \times D_2)$; f définit une application de D_1 dans $\Gamma(V \times D_2)$, holomorphe sur $\overset{\circ}{D}_1$. Soit en effet $z_o \in D_1$;

$\forall\, p \in \mathbb{N}$ $\quad f_p^{z_o}(\omega,w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\omega,\zeta,w)}{(\zeta-z_o)^{p+1}}\, d\zeta$ définit un élément de $\Gamma(V\times D_2)$. (Comme intégrale de Bochner par exemple) ; en effet

$$\| f_p^{z_o}(\omega,w)\|_{\Gamma(V\times D_2)} \leq \frac{1}{|r_1-z_o|^p} \|f\|_{\Gamma(V\times D_1\times D_2)} .$$

L'application $D_1 \mapsto \Gamma(V\times D_2)$

$$z \curvearrowright f(.,z,.)$$

est analytique au point $z_o \in \mathring{D}_1$.

Considérons l'algèbre de Banach $\dfrac{\Gamma(V\times D_2)[X]}{P_1(\omega,X,w)\Gamma(V\times D_2)[X]}$.

Le spectre de l'élément $\dot{X}$ de cette algèbre est $\{z\in\mathbb{C},\ \exists(\omega,w)\in V\times D_2,\ P_1(\omega,z,w)=0\}$. D'après la construction de V, D_1, D_2, ce spectre est inclus dans $\mathring{D}_1$. L'application des techniques du calcul symbolique à l'élément $f(\dot{X})$ fournit l'existence d'éléments A_o, $A_1,\ldots,A_{m_1-1}$ dans $\Gamma(V\times D_2)$ tels que :

$$\forall(\omega,z,w)\in V\times D_1\times D_2,\ f(\omega,z,w) = \sum_o^{m_1-1} A_i(\omega,w)z^i + P_1(\omega,z,w)U_1(\omega,z,w)$$

$$\text{où}\quad U_1 \in \Gamma(V\times D_1\times D_2) .$$

Une autre manière de prouver ce résultat aurait d'ailleurs été le recours authéorème de préparation de Weierstrass. Les fonctions A_i sont alors données de manière explicite sous forme intégrale. La méthode utilisée ici l'a été par Yves Meyer dans [10].

On considère ensuite l'algèbre de Banach $\dfrac{A(V)[X]}{(X^{k'}+u_1^o(\omega)X^{k'-1}+\ldots+u_k^o(\omega)).A(V)[X]}$. Chaque fonction A_i définit une application $D_2 \mapsto A(V)$, holomorphe sur $\mathring{D}_2$. Le spectre de l'élément $\dot{X}$ de cette algèbre de Banach est inclus dans $\mathring{D}_2$. Le même procédé (ou encore le recours au théorème de préparation de Weierstrass) assure l'existence de fonctions $A_{i,j} \in A(V)$

$$i = 1,\ldots,m_1 - 1$$

$$j = 1,\ldots,k'-1$$

telles que, dans $V \times D_1 \times D_2$, on ait

$$f(\omega,z,w) = \sum_{o}^{m_1-1} \sum_{o}^{k'-1} A_{ij}(\omega) z^i w^j + U_1 P_1 + U_2 P_2$$

$$U_1, U_2 \in \Gamma(V \times D_1 \times D_2)$$

L'une ou l'autre des méthodes utilisées (la continuité du calcul symbolique dans le premier cas) fournit l'existence d'une constante K_o telle que

$$\sum_{o}^{m_1-1} \sum_{o}^{k'-1} \|A_{ij}\|_{A(V)} \leq K_o \|f\|_{\Gamma(V \times D_1 \times D_2)} .$$

Grâce au lemme 3.1, $\exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in A(V)$, $U_1, U_2 \in \Gamma(V \times D_1 \times D_2)$ telles que l'on ait, dans $V \times D_1 \times D_2$,

$$f(\omega,z,w) = \sum_{1}^{k} \lambda_i(\omega) Q_i(z,w) + U_1 P_1 + U_2 P_2 .$$ De plus,

$\sum_{1}^{k} \|\lambda_i\|_{A(V)} \leq K'_o \|f\|_{\Gamma(V \times D_1 \times D_2)}$, où K'_o désigne une constante positive.

Considérons une suite F_n de $\Gamma(V \times D_1 \times D_2)$,

$$F_n = U_1^{(n)} P_1 + U_2^{(n)} P_2 .$$

Supposons $F_n \rightarrow F$ dans $\Gamma(V \times D_1 \times D_2)$. D'après ce qui précède

$F = \sum_{1}^{k} \lambda_i(\omega) Q_i(z,w) + U_1 P_1 + U_2 P_2$, où U_1, $U_2 \in \Gamma(V \times D_1 \times D_2)$.

Fixons $\omega \in V$.

$D_1 \times D_2$ étant privilégié, V étant choisi assez petit, le théorème des voisinages privilégiés de Douady et la conservation des suites exactes directes par petites perturbations, permettent de trouver une décomposition "économique" de $F_n(\omega,z,w)$. Il existe $C_\omega > 0$ telle que, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

il existe $V_1^n(\omega,z,w)$, $V_2^n(\omega,z,w) \in B(D_1 \times D_2)$ (ω est fixé), avec

(a) $$F_n(\omega,z,w) = V_1^n(\omega,z,w)P_1(\omega,z,w) + V_2^n(\omega,z,w)P_2(\omega,z,w) \text{ dans } D_1 \times D_2 \ ;$$

(b) $$\|V_1^n(\omega,.,.)\|_{B(D_1 \times D_2)} + \|V_2^n(\omega,.,.)\|_{B(D_1 \times D_2)} \leq C_\omega \|F_n(\omega,.,.)\|_{B(D_1 \times D_2)}$$

Choisissons $D_1' = D(0,r_1')$ $\quad r_1' < r_1$

$\quad\quad D_2' = D(0,r_2')$ $\quad r_2' < r_2$.

On peut extraire des suites $V_1^n(\omega,.,.)$ et $V_2^n(\omega,.,.)$ deux sous-suites convergent dans $B(D_1' \times D_2')$ vers $V_1(\omega,.,.)$ et $V_2(\omega,.,.)$ respectivement.

Or, si V est assez petit, pour tout $\omega \in V$, la suite ci-dessous reste exacte directe :

$$B(D_1' \times D_2') \overset{u}{\mapsto} (B(D_1' \times D_2'))^2 \times \mathbb{C}^k \overset{v}{\mapsto} B(D_1' \times D_2')$$

$u(F) = (-M_2(\omega,.,.)F,\ M_1(\omega,.,.)F,\ 0,\ 0\ldots0)$.

$v(F,G,\lambda_1,\ldots,\lambda_k) = F M_1(\omega,.,.) + G M_2(\omega,.,.) + \sum_1^k \lambda_i Q_i(.\ ,.)$.

Or, dans $D_1' \times D_2'$, on a, en faisant tendre $n \mapsto \infty$,

$$\sum_1^k \lambda_i(\omega)Q_i(z,w) = (V_1 - U_1)P_1 + (V_2 - U_2)P_2$$

Cela implique $\forall i = 1,\ldots,k$, $\lambda_i(\omega) = 0$. Ce raisonnement est valable pour tout $\omega \in V$.

L'idéal $P_1 \cdot \Gamma(V \times D_1 \times D_2) + P_2 \cdot \Gamma(V \times D_1 \times D_2)$ est fermé dans $\Gamma(V \times D_1 \times D_2)$.

L'algèbre $B(V \times D_1 \times D_2)$ est une algèbre de Banach isomorphe à $(A(V))^k$. ∎

Lemme 3.4 : Soit V un voisinage de e dans Ω ; soient également

$$D_1 = D(0,r_1)$$

$$D_2 = D(0,r_2)$$

tels que $V \times D_1 \times D_2$ répondre aux lemmes 3.1, 3.2, 3.3. Soient $P \in \mathbb{N}^*$, $W_1, W_2, \ldots, W_P$ P pavés de $\Omega \times \mathbb{C}^2$, $f_1, f_2, \ldots, f_P$ P fonctions à valeurs complexes définies sur ces pavés, telles que :

① $\{(\omega,z,w) \in V \times D_1 \times D_2,\ M_1(\omega,z,w) = M_2(\omega,z,w) = 0\} \subset \bigcup_1^P \mathring{W}_j$

② $\forall j = 1,\ldots,P,\quad f_j \in \Gamma(W_j)$.

③ $\forall j = 1,\ldots,P,\ \forall k = 1,\ldots,P,\ \mathring{W}_j \cap \mathring{W}_k \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists g_{j,k}^{(1)}, g_{j,k}^{(2)} \in \mathcal{O}_o(\mathring{W}_j \cap \mathring{W}_k)$ telles que, sur $\mathring{W}_j \cap \mathring{W}_k$,
$f_j - f_k = M_1(\omega,z,w)g_{j,k}^{(1)} + M_2(\omega,z,w)g_{j,k}^{(2)}$.

Alors, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in A(V)$ telles que :

$\forall u \in (\overset{\circ}{V} \times D_1 \times D_2) \cap \{(\omega,z,w) \in \Omega \times \mathbb{C}^2,\ M_1(\omega,z,w) = M_2(\omega,z,w) = 0\}$,

$u \in W_j \Rightarrow$ le germe en u de f_j est congru modulo (M_1,M_2) au germe en u de $(\omega,z,w) \to \sum_1^k \lambda_i(\omega)Q_i(z,w)$.

De plus, il existe une constante ne dépendant que de $V \times D_1 \times D_2$, K, telle que

$$\sum_1^k \|\lambda_i\|_{A(V)} \leq K \sup_{1 \leq j \leq P} \|f_j\|_{\Gamma(W_j)}$$

Soit $\omega_o \in V$.

Les zéros communs de $M_1(\omega_o,z,w) = M_2(\omega_o,z,w) = 0$ sont au nombre de k dans $\mathring{D}_1 \times \mathring{D}_2$ (comptés avec leur multiplicité).

Notons ces zéros (z_o,w_o) $(z_1,w_1),\ldots,(z_q,w_q)$. On peut trouver α, $|\alpha| < \eta_o$ (voir lemme 3-2), tel que les éléments suivants

$$(\xi_o,\eta_o) = (z_o, w_o + \alpha z_o), (\xi_1,\eta_1) = (z_1, w_1 + \alpha z_1), \text{ etc...}$$

soient dans $\mathring{D}_1 \times \mathring{D}_2$ et que $i \neq j \Rightarrow w_i + \alpha z_i \neq w_j + \alpha z_j$.

Cet α sera dorénavant fixé.

Soit $\psi : \Omega \times \mathbb{C}^2 \to \Omega \times \mathbb{C}^2$

$(\omega, z, w) \quad \to (\omega, z, w + \alpha z)$

La preuve du lemme 3.2, et le fait que la position des zéros communs de $M_{1,\alpha}(\omega, z, w) = M_{2,\alpha}(\omega, z, w) = 0$ dans $\mathring{D}_1 \times \mathring{D}_2$ dépende continuement de ω, permettent de construire ε_1, ε_2, et v, voisinage de ω_o dans Ω, tels que :

(a) $i \neq j \quad \Rightarrow \Delta((\xi_i, \eta_i); \varepsilon_1, \varepsilon_2) \cap \Delta((\xi_j, \eta_j); \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \emptyset$.
$i = 0, \ldots, q$
$j = 0, \ldots, q$

(b) $i \neq j \quad \Rightarrow D(\eta_i, \varepsilon_2) \cap D(\eta_j, \varepsilon_2) = \emptyset$
$i = 0, \ldots, q$
$j = 0, \ldots, q$

(c) $(\omega_o, z_i, w_i) \in \mathring{W}_j \Rightarrow v \times \Delta((\xi_i, \eta_i); \varepsilon_1, \varepsilon_2) \subset \psi(\mathring{W}_j)$.
$0 \leq i \leq q$
$1 \leq j \leq P$

(d) $\omega \in v$ et $M_{1,\alpha}(\omega, z, w) = M_{2,\alpha}(\omega, z, w) = 0$, $(z, w) \in \mathring{D}_1 \times \mathring{D}_2$,
$\Rightarrow \exists i \in \{0, \ldots, q\} \quad |\xi_i - z| \leq \varepsilon_1, \ |\eta_i - w| \leq \varepsilon_2$.

(e) $v \times \Delta((\xi_i, \eta_i); \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est, pour tout i, un voisinage de (ξ_i, η_i) dans lequel :

$$M_{1,\alpha}(\omega, z, w) = ((z - \xi_i)^{p_i} + \alpha_1^i(\omega, w)(z - \xi_i)^{p_i - 1} + \ldots + \alpha_{p_i}^i(\omega, w)) N_\alpha^{(i)}(\omega, z, w)$$

où $\forall\, j = 1, \ldots, p_i$, $\alpha_j^i \in \mathcal{O}_o(v \times D(\eta_i, \varepsilon_2))$ et $N_\alpha^{(i)} \in \mathcal{O}_o(v \times D(\xi_i, \varepsilon_1) \times D(\eta_i, \varepsilon_2))$

(f) $\forall \omega \in v$, les zéros, dans $\mathring{D}_2$, de $w^{k'} + u_1^\alpha(\omega) w^{k'-1} + \ldots + u_{k'}^\alpha(\omega)$ sont dans $\bigcup_o^q \mathring{D}(\eta_i, \varepsilon_2)$

Si (ξ_i, η_i) est tel que $(\omega_o, \xi_i, \eta_i) \in \psi(\mathring{W}_j)$, posons $f = f_j \circ \psi^{-1}$ au voisinage de $v \times \Delta((\xi_i, \eta_i); \varepsilon_1, \varepsilon_2) \subset \psi(\mathring{W}_j)$. Considérons f au voisinage, par exemple, de $v \times \Delta((\xi_o, \eta_o); \varepsilon_1, \varepsilon_2)$. On considère l'extension algébrique de $\Gamma(v \times \Delta(\eta_o, \varepsilon_2))$

par le polynôme distingué suivant :

$(z-\xi_o)^{p_o} + \alpha_1^o(\omega,w)(z-\xi_o)^{p_o-1} + \ldots + \alpha_{p_o}^o(\omega,w)$. Le spectre de l'élément $\dot{X}$ de cette algèbre est inclus dans $D(\xi_o,\varepsilon_1)$. Par le procédé du calcul symbolique, déjà utilisé [10], ou en appliquant le théorème de préparation de Weierstrass, on construit $N(\omega_o)$ fonctions, $a_o, a_1, \ldots, a_{N(\omega_o)-1}$, dans $\mathcal{O}_o(v \times \bigcup_o^q D(\eta_i,\varepsilon_2))$, telles que :

$$\Psi u = (\omega,z,w) \in v \times \bigcup_o^q (D(\xi_i,\varepsilon_1) \times D(\eta_i,\varepsilon_2)),$$

les germes en u de f et de $\sum_o^{N(\omega_o)-1} a_j(\omega,w)z^j$ sont congrus modulo

$M_{1,\alpha}(\omega,z,w)\mathcal{O}_o(u) + M_{2,\alpha}(\omega,z,w)\mathcal{O}_o(u)$.

Chacune des fonctions a_j $(j = 0,\ldots,N(\omega_o)-1)$ ainsi construites définit une application holomorphe au voisinage du spectre de l'élément $\dot{X}$ de l'extension de A(v) par le polynôme $w^{k'} + u_1^\alpha(\omega)w^{k'-1} + \ldots + u_{k'}^\alpha(\omega)$ (condition f).

Il existe donc une famille a_i^j d'éléments de A(v),

$$i = 0,\ldots,N(\omega_o) - 1$$

$$j = 0,\ldots,k-1$$

telle que $\Psi u = (\omega,z,w) \in v \times \bigcup_o^q \Delta((\xi_i,\eta_i);\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, les germes en u de f et de $\sum_o^{N(\omega_o)-1} \sum_o^{k'-1} a_i^j(\omega)z^i w^j$ soient congrus modulo $M_{1,\alpha}\mathcal{O}_o(u) + M_{2,\alpha}\mathcal{O}_o(u)$.

Donc $\Psi u = (\omega,z,w) \in \psi^{-1}(v \times \bigcup_o^q \Delta((\xi_i,\eta_i);\varepsilon_1,\varepsilon_2))$, les germes en u de $f_o \circ \psi$ et $\sum_o^{N(\omega_o)-1} \sum_o^{k'-1} a_i^j(\omega)z^i(w+\alpha z)^j$ sont congrus modulo

$M_1\ \mathcal{O}_o(u) + M_2\ \mathcal{O}_o(u)$.

On achève la preuve du lemme en effectuant une partition de l'unité de V associée à un recouvrement par des voisinages du type v. On applique enfin le lemme 3.1.

L'existence de la constante K résulte de ce que seul un nombre fini de tels voisinages est à considérer, ainsi que de la continuité du calcul symbolique. ∎

Lemme 3.5 : On suppose toujours $M_1(e,0,0) = M_2(e,0,0) = 0$.
Soit $V \times D_1 \times D_2$ un voisinage de $(e,0,0)$ dans $\Omega \times \mathbb{C}^2$ satisfaisant aux lemmes précédents. Soit $\varphi \in \mathcal{B}(V \times D_1 \times D_2)$. $\exists \nu \in \mathcal{M}$, telle que l'application

$$(\omega,z,w) \mapsto (\omega\nu)\hat{}\,(z,w) - \varphi(\omega,z,w) \in M_1\mathcal{O}_o(V \times D_1 \times D_2) + M_2\mathcal{O}_o(V \times D_1 \times D_2) .$$

Soit $\nu \in \mathcal{M}$.

$$\nu = \sum_{\|q_1(\alpha_1,\beta_1)+\ldots+q_N(\alpha_N,\beta_N)\| \le \ell} c(q_1,\ldots,q_N)\,\delta(q_1(\alpha_1,\beta_1)+\ldots+q_N(\alpha_N,\beta_N))$$

$$(\omega\nu)\hat{}\,(z,w) = \sum_{\|q_1(\alpha_1,\beta_1)+\ldots+q_N(\alpha_N,\beta_N)\| \le \ell} c(q_1\ldots q_N)\omega_1^{q_1}\ldots\omega_{N-2}^{q_{N-2}} e^{-i\sum_1^N q_i(\alpha_i z+\beta_i w)}$$

$$= \sum_{0 \le j \le T-1} \frac{(-iz)^j}{j!} \sum_{\|a_1(\alpha_1,\beta_1)+\ldots+q_N(\alpha_N,\beta_N)\| \le \ell} (\alpha_1 q_1+\ldots+\alpha_N q_N)^j \times$$

$$\times\, c(q_1\ldots q_N)\,\omega_1^{q_1}\ldots\omega_{N-2}^{q_{N-1}}\, e^{-iw.\sum_1^N \beta_i q_i} +$$

$$+ \sum_{j > T-1} \frac{(-iz)^j}{j!} \sum_{\|q_1(\alpha_1,\beta_1)+\ldots+q_N(\alpha_N,\beta_N)\| \le \ell} (\alpha_1 q_1+\ldots+\alpha_N q_N)^j \times$$

$$\times\, c(q_1\ldots q_N)\omega_1^{q_1}\ldots\omega_{N-2}^{q_{N-2}}\, e^{-iw.\sum_1^N \beta_i q_i}$$

(T étant pour l'instant arbitraire).

On peut décomposer $(\omega\nu)\hat{}\,(z,w) = F_1(\omega,z,w) + F_2(\omega,z,w)$

$$F_1(\omega,z,w) =$$

$$\sum_{0\le j,s\le T-1} (-i)^{j+s} z^j w^s \sum_{\|q_1(\alpha_1,\beta_1)+\ldots+q_N(\alpha_N,\beta_N)\|\le \ell} c(q_1\ldots q_N)\Big(\sum_1^N \alpha_i q_i\Big)^j \times$$

$$\times \Big(\sum_1^N \beta_i q_i\Big)^s \cdot \frac{\omega_1^{q_1}\ldots\omega_{N-2}^{q_{N-2}}}{j!s!} \quad .$$

Donnons nous maintenant $\varphi \in \mathbf{B}(V\times D_1\times D_2)$. On choisira comme représentant :

$$\varphi(\omega,z,w) = \sum_1^k \lambda_i(\omega)Q_i(z,w) \quad \|\varphi\|_{\mathbf{B}(V\times D_1\times D_2)} \sum_1^k \|\lambda_i\|_{A(V)} \quad .$$

En développant les polynômes Q_i et en utilisant les relations :

$$z^{m_1} \equiv -a_1^o(\omega,w)z^{m_1-1} - \ldots - a_{m_1}^o(\omega,w).$$

$$w^k \equiv -u_1^o(\omega)w^{k'-1} - \ldots - u_{k'}^o(\omega).$$

On peut écrire $\varphi(\omega,z,w) \equiv \sum_o^{T-1}\sum_o^{T-1} \varphi_{ij}(\omega)z^i.w^j$ avec

$$\sum_o^{T-1}\sum_o^{T-1} \|\varphi_{i,j}\|_{A(V)} \le C_o\|\varphi\|_{\mathbf{B}(V\times D_1\times D_2)}$$

$$T = \sup(k,m_1).$$

Posons $\ell_1 = \ell_2 = \frac{T}{2}$.

$$\|q_1(\alpha_1,\beta_1)+\ldots+q_N(\alpha_N,\beta_N)\| \le \ell \Leftrightarrow |\Sigma\, q_i\alpha_i| \le \ell_1 \text{ et } |\Sigma\, q_i\beta_i| \le \ell_1$$

Nous allons essayer d'identifier $\sum_o^{T-1}\sum_o^{T-1} \varphi_{i,j}(\omega)z^i.w^j$ avec une fonction

F_1 associée à une certaine mesure $\nu \in \mathcal{M}$.

Pour cela, si $(q_1,\dots,q_{N-2}) \in \mathbb{Z}^{N-2}$, posons :

$$F(q_1,\dots,q_{N-2}) = \{(q_{N-1},q_N\} \in \mathbb{Z}^2, \| \sum_1^N q_i(\alpha_i,\beta_i)\| \leq \ell\} .$$

$$F'(q_1,\dots,q_{N-2}) = \{(q_{N-1},q_N) \in \mathbb{Z}^2, -\ell_1 \leq \sum_1^N \alpha_i q_i < \ell_1 ,$$

$$-\ell_2 \leq \sum_1^N \beta_i q_i < \ell_2 \} .$$

On a card $(F'(q_1\cdots q_{N-2})) = T^2$.

Posons $c(q_1\cdots q_N) = 0$ si $(q_{N-1},q_N) \in (F \setminus F')(q_1\cdots q_{N-2})$.

$q_1\cdots q_{N-2}$ étant fixés, on est amené à trouver T^2 nombres $c(q_1\cdots q_{N-2}, q_{N-1},q_N)$ tels que :

$$\forall\, j \in \{0,\dots,T-1\}$$

$$\forall\, s \in \{0,\dots,T-1\},$$

$$(*) \quad \sum_{(q_{N-1},q_N) \in F'(q_1\cdots q_{N-2})} (\alpha_1 q_1+\dots+\alpha_N q_N)^j (\beta_1 q_1+\dots+\beta_N q_N)^s c(q_1\dots,q_N) =$$

$$= (-i)^{j+s} j!s! \varphi_{j,s}(q_1\cdots q_{N-2})$$

$$\varphi_{j,s}(\omega) = \sum \varphi_{j,s}(q_1\cdots q_{N-2})\, \omega_1^{q_1}\cdots\omega_{N-2}^{q_{N-2}} .$$

Or $F'(q_1\cdots q_{N-2}) = E(q_1\cdots q_{N-2}) \times E'(q_1\cdots q_{N-2})$, car $(\alpha_N,\beta_N) = (0,1)$, $(\alpha_{N-1},\beta_{N-1}) = (1,0)$, où $E(q_1,\dots,q_{N-2})$ et $E'(q_1,\dots,q_{N-2})$ sont deux parties finies de $\mathbb{Z}$.

On peut encore écrire (*) :

$$\sum_{q_{N-1} \in E(q_1\cdots q_{N-2})} (\alpha_1 q_1+\dots+\alpha_{N-1} q_{N-1})^j \Big(\sum_{q_N \in E'(q_1\cdots q_{N-2})} (\beta_1 q_1+\dots+\beta_N q_N)^s \times$$

$$\times c(q_1\cdots q_N)\Big) = (-i)^{j+s} j!s!\, \varphi_{j,s}(q_1,\dots,q_{N-2})$$

On détermine ainsi les $c(q_1,\dots,q_N)$, où $(q_{N-1},q_N) \in F'(q_1\cdots q_{N-2})$, en résolvant deux systèmes de Cramer.

Il existe de plus une constante C_1 telle que :

$$\frac{}{F'(q_1-q_{N-2})}\,|c(q_1\cdots q_N)| \le C_1 \|\varphi\|_{\mathbb{B}(V\times D_1\times D_2)} .$$

(Les déterminants intervenant ici sont du type Van Der Monde).

$$\text{Or } \|F_2\|_{\mathbb{B}(V\times D_1\times D_2)} \le \sum_{\substack{j>T-1\\ \text{ou}\\ s>T-1}} \|z^j\|_{\mathbb{B}(V\times D_1\times D_2)} \|w^s\|_{\mathbb{B}(V\times D_1\times D_2)} \frac{\ell_1^j \ell_2^j}{j!s!} \Sigma|c(q_1\cdots q_N)|$$

D'après la remarque suivant le lemme 3.2, si β est fixé, on peut, moyennant un choix judicieux de V et r_2 faire en sorte que :

$$\|z^j\|_{\mathbb{B}(V\times D_1\times D_2)} \le m_1\ \beta^{\left[\frac{j}{m_1}\right]} \le T\,\beta^{\left[\frac{j}{T}\right]} \quad \text{pour } j\ge T \quad (\beta<1)$$

$$\|w^j\|_{\mathbb{B}(V\times D_1\times D_2)} \le k\,\beta^{\left[\frac{j}{k}\right]} \le T\,\beta^{\left[\frac{j}{T}\right]} \quad \text{pour } j\ge T .$$

Si β est choisi assez petit $\|F_2\|_{\mathbb{B}(V\times D_1\times D_2)} \le \frac{1}{2C_1}\,\Sigma|c(q_1\cdots q_N)|$.

Tout élément de $\mathbb{B}(V\times D_1\times D_2),\varphi$, s'écrit donc sous la forme :

$$(\omega\nu)\hat{}(z,w) - F_2(\omega,z,w) ,$$

où ν est portée par $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]^2 \cap \Gamma$, $\|\nu\| \le C_1\,\|\varphi\|_{\mathbb{B}(V\times D_1\times D_2)}$,

$$\|F_2\|_{\mathbb{B}(V\times D_1\times D_2)} \le \frac{1}{2}\|\varphi\|_{\mathbb{B}(V\times D_1\times D_2)} .$$

On obtient alors le lemme par approximations successives. ∎

Nous sommes maintenant en mesure de munir $\mathfrak{F}(K)$ d'une structure d'algèbre de Banach. Soit $a\in G$, $a = J_o(\omega_o,z_o,w_o)$. Soit $\mathbb{U}_a$ un voisinage compact de a

dans G, en correspondance avec un voisinage $(V \times D_1 \times D_2)_a$ de (ω_o, z_o, w_o) dans $\Omega \times \mathbb{C}^2$ satisfaisant aux lemmes 3.1 à 3.5.

On posera $U_a = (V \times D_1 \times D_2)_a$.

On peut ainsi recouvrir $K \subset G$ par la réunion des intérieurs de voisinages compacts $\mathfrak{Q}_j$, $j = 1,\ldots,S$, où les U_j associés aux $\mathfrak{Q}_j$ sont des voisinages dans $\Omega \times \mathbb{C}^2$ des points (ω_j, z_j, w_j) satisfaisant aux lemmes 3.1 à 3.5.

On munit l'algèbre $\mathbb{C}(\mathfrak{Q}_j)$ des fonctions F de $\mathfrak{Q}_j$ dans $\mathbb{C}$ telles que $F \circ J_o \in \Gamma(U_j)$, quotientée par l'idéal engendré par $\mathcal{G}\mu_1$ et $\mathcal{G}\mu_2$, d'une structure d'algèbre de Banach en transportant la structure d'algèbre de $\mathbb{B}(V_j \times D_1^{(j)} \times D_2^{(j)})$.

Lemme 3.6 : Pour tout $j = 1,2,\ldots,S$, il existe un morphisme d'anneaux ρ_j de $\mathcal{F}(K)$ dans $\mathbb{C}(\mathfrak{Q}_j)$, tel que, pour toute section $s \in \mathcal{F}(K)$, et pour tout $x \in K \cap \mathring{\mathfrak{Q}}_j$, $s(x)$ soit l'image, modulo $\mathcal{G}\mu_1 \cdot \mathcal{A}(x) + \mathcal{G}\mu_2 \cdot \mathcal{O}(x)$, du germe en x de l'élément $\rho_j(s)$.

La donnée de $s \in \mathcal{F}(\mathfrak{Q}_j)$ correspond à la donnée d'un recouvrement ouvert de $\mathfrak{Q}_j$ par $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \ldots, \mathcal{W}_r$, et de fonctions dans $\mathcal{A}(\mathcal{W}_j)$ $(j = 1,\ldots,r)$ vérifiant les conditions de compatibilité.

En transportant le problème par J_o ,on est ramené aux conditions d'application du lemme 3.4. ∎

Si $s \in \mathcal{F}(K)$, posons $\|s\|_{\mathcal{F}(K)} = \sup_{1 \le j \le S} \|\rho_j(s)\|_{\mathbb{C}(\mathfrak{Q}_j)}$.

Proposition 3.7 : $\mathcal{F}(K)$, muni de la norme ci-dessus est un espace de Banach. La structure d'algèbre de Banach est en fait indépendante du recouvrement de K choisi.

Considérons le morphisme $\rho : \mathcal{F}(K) \to \prod_1^S \mathbb{C}(\mathfrak{Q}_j)$ défini par

$$s \mapsto (\rho_1(s),\ldots,\rho_S(s)).$$

L'image de ρ est l'ensemble des éléments $(\phi_1,\ldots,\phi_S) \in \prod_1^S \mathbb{C}(\mathfrak{Q}_j)$ tels que : $\forall j,k \in \{1,\ldots,s\}$, $\mathfrak{Q}_j \cap \mathfrak{Q}_k \neq \phi$, $\forall x \in K \cap \mathfrak{Q}_j \cap \mathfrak{Q}_k$, le germe en x de $\phi_j - \phi_k$ est dans $\mathcal{G}\mu_1 \cdot \mathcal{A}(x) + \mathcal{G}\mu_2 \cdot \mathcal{A}(x)$. Nous allons montrer que cette

image est fermée dans $\prod_1^S \mathbb{C}(\mathbb{Q}_j)$.

Supposons $\mathring{\mathbb{Q}}_1 \cap \mathring{\mathbb{Q}}_2 \cap K \neq \phi$. Dans $U_1 : \phi_1 \circ J_o(\omega,z,w) = \sum_1^{k_1} \lambda_i^1(\omega) Q_i^{(1)}(z,w)$. Dans $U_2 : \phi_2 \circ J_o(\omega,z,w) = \sum_1^{k_2} \lambda_i^2(\omega) Q_i^{(2)}(z,w)$. Soit $(\omega_o,z_o,w_o) \in U_1 \cap U_2 \cap \{(\omega,z,w), M_i(\omega,z,w) = 0,\ i = 1,2\}$. On peut (lemme 3.2) associer à (ω_o,z_o,w_o) un voisinage $v \times \delta_1 \times \delta_2$ inclus dans $U_1 \cap U_2$, et une famille $(q_1,q_2,\ldots,q_{p_o})$ de polynômes telle que dans $v \times \delta_1 \times \delta_2$, $\phi_i \cdot J_o(\omega,z,w) = \sum_1^{p_o} \alpha_j^{(i)}(\omega) q_j(z,w) + (M_1 H_1^{(i)} + M_2 H_2^{(i)})(\omega,z,w), (i = 1,2)$.

Or, si l'on suppose, $\forall x \in K \cap \mathring{\mathbb{Q}}_1 \cap \mathring{\mathbb{Q}}_2, (\phi_1 - \phi_2)(x) \in \complement\mu_1 . \alpha(x) + \complement\mu_2 . \alpha(x)$, alors $\forall \omega \in v, \exists u_\omega, v_\omega$ dans $B(\delta_1 \times \delta_2)$ telles que :

$$(\phi_1 - \phi_2) \circ J_o(\omega,z,w) = M_1(\omega,z,w) u_\omega(z,w) + M_2(\omega,z,w) v_\omega(z,w) \text{ dans } \delta_1 \times \delta_2 .$$

On a donc, grâce au choix de $v \times \delta_1 \times \delta_2$, (voir preuve du lemme 3.3), $\forall i = 1,\ldots,p_o$, $(\alpha_i^{(1)} - \alpha_i^{(2)})(\omega) = 0$ si $\omega \in v$. Or (ω_o,z_o,w_o) étant fixé, ainsi que $v \times \delta_1 \times \delta_2$, l'application $\mathbb{C}(\mathbb{Q}_1) \times \mathbb{C}(\mathbb{Q}_2) \mapsto (A(v))^{p_o}$:

$$(\phi_1,\phi_2) \mapsto (\alpha_i^{(1)} - \alpha_i^{(2)})_{i = 1,\ldots,p_o}$$

est continue (voir lemme 3.1).

La propriété : $\forall j,k \quad \mathbb{Q}_j \cap \mathbb{Q}_k \neq \phi$

$\Rightarrow \forall x \in K \cap \mathring{\mathbb{Q}}_j \cap \mathring{\mathbb{Q}}_k$, $(\phi_j - \phi_k)(x) \in \complement\mu_i\ \alpha(x) + \complement\mu_2\ \alpha(x)$ est une propriété passant à la fermeture dans $\mathbb{C}(\mathbb{Q}_1) \times \ldots \times \mathbb{C}(\mathbb{Q}_S)$.

L'image de ρ est donc complète. ρ est injectif. La première partie de la proposition est démontrée.

Donnons nous deux recouvrements de K par des familles $(\mathbb{Q}_1,\mathbb{Q}_2,\ldots,\mathbb{Q}_S)$, $(\mathbb{Q}_1,\mathbb{Q}_2,\ldots,\mathbb{Q}_{S'})$ de pavés associés à des pavés de $\Omega \times \mathbb{C}^2$ satisfaisant les lemmes 3.1 à 3.5.

Considérons l'identité de $\mathcal{F}(K) \hookrightarrow \mathcal{E}(K)$, l'espace de départ étant muni de la norme associée au premier recouvrement, l'espace d'arrivée de celle associée au second.

$$K \cap \mathcal{Q}'_1 \subset \mathring{\mathcal{Q}}_1 \cup \mathring{\mathcal{Q}}_2 \cup \ldots \cup \mathring{\mathcal{Q}}_{j_1} .$$

En ramenant par J_o, on se trouve, pour calculer $\rho'_1(s)$, lorsque $s \in \mathcal{F}(K)$, à partir des $\rho_j(s)$, dans les conditions d'application du lemme 3.4.

On déduit de ce lemme l'existence d'une constante C dépendant des deux recouvrements, telle que :

$$\sup_{i=1,\ldots,S} \|\rho'_i(s)\| \leq C \sup_{i=1,\ldots,S} \|\rho_i(s)\| .$$

On conclut grâce au théorème d'isomorphisme de Banach. ∎

Proposition 3.8 : Il existe un morphisme injectif ψ, continu, de B dans $\mathcal{F}(K)$.

Soit $\nu \in \mathcal{M}_k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\nu = \sum_{\|q_1(\alpha_1,\beta_1)+\ldots+q_N(\alpha_N,\beta_N)\| \leq k} c(q_1 \ldots q_N)\delta(q_1(\alpha_1,\beta_1)+\ldots+ q_N(\alpha_N,\beta_N)).$$

Posons $(\mathcal{G}\nu)(z_1 \ldots z_N) = \sum_{\|q_1(\alpha_1,\beta_1)+\ldots+q_N(\alpha_N,\beta_N)\| \leq k} c(q_1 \ldots q_N) z_1^{q_1} \ldots z_N^{q_N}$.

On considère l'application de $\mathcal{M}_k$ dans $\mathcal{F}(K)$, qui, à ν, associe l'élément de $\mathcal{F}(K)$ défini naturellement à partir de $\mathcal{G}\nu$. Cette application est continue. D'autre part, si ν_1 et ν_2 définissent le même élément de B, donc le même opérateur de E ,

$$\nu_1 - \nu_2 = \mu_1 * \tau_1 + \mu_2 * \tau_2, \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathcal{M} .$$

On a donc $\mathcal{G}(\nu_1-\nu_2) \in \mathcal{G}\mu_1 \cdot \mathcal{O}(G) + \mathcal{G}\mu_2 \cdot \mathcal{O}(G)$. Ce qui permet de définir un morphisme continu de $B \to \mathcal{F}(K)$. Ce morphisme est injectif :
en effet, soit $\nu \in \mathcal{M}$, $\mathcal{G}\nu \equiv 0$ dans $\mathcal{F}(K)$. Cela implique :

$\hat{\nu}$ se trouve dans l'idéal des fonctions entières se décomposant localement suivant $\hat{\mu}_1$ et $\hat{\mu}_2$.

Or l'étude faite autour de la densité des exponentielle-polynômes solutions de (1) dans l'espace des solutions C^∞ de (1), [11], nous montre qu'alors : $T_\nu \equiv 0$. ∎

Nous sommes en mesure de démontrer le théorème fondamental de ce paragraphe, analogue du théorème 3 de Y. Meyer [10] .

Théorème 3.9 : Le morphisme continu ψ de B dans $\mathcal{J}(K)$ construit dans la proposition 3.8, est un isomorphisme d'algèbres de Banach.

Associons à un élément $a \in K$ un pavé $\mathbb{Q}_a = J_o(V_a \times D_a^{(1)} \times D_a^{(2)})$.

($V_a \times D_a^{(1)} \times D_a^{(2)}$ satisfait aux lemmes 3.1 à 3.5).

On pose, comme précédemment $U_a = V_a \times D_a^{(1)} \times D_a^{(2)}$. Associons à U_a un élément $\alpha_a \in A(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} \alpha_a(\omega_a) = 1 \\ \text{supp } \alpha_a \subset V_a \end{cases}$$

Définissons $f_a : \mathbb{Q}_a \to [0,1]$ par

$$u \in \mathbb{Q}_a \mapsto (\omega, z, w) = J_o^{-1}(u) \mapsto \alpha_a(\omega).$$

On peut prolonger f_a en une fonction : $G \mapsto [0,1]$. On pose pour cela $f_a = 0$ sur $G \setminus \mathbb{Q}_a$. Le germe de l'élément f_a ainsi défini au voisinage de K est dans $\mathcal{A}(K)$.

$\mathbb{Q}'_a$ désignera un voisinage de a assez petit pour que :

$$f_a \geq \frac{1}{2} \quad \text{sur } \mathbb{Q}'_a .$$

Recouvrons K par $\mathring{\mathbb{Q}}'_{a_1} \cup \mathring{\mathbb{Q}}'_{a_2} \cup \ldots \cup \mathring{\mathbb{Q}}_{a_S}$. On notera $\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2, \ldots, \mathbb{Q}_S$, les pavés $\mathbb{Q}_{a_1}, \mathbb{Q}_{a_2}, \ldots, \mathbb{Q}_{a_S}$. On définit enfin la suite $(f_j)_{j=1,\ldots,S}$ d'éléments de $\mathcal{A}(K)$ en posant :

$$f_j = f_{a_j} \Big(\sum_1^S f_{a_k} \Big)^{-1} .$$

Soit $\forall j = 1,\ldots,S$, $c_j = \{\overline{x \in K,\ f_j(x) \neq 0}\}$. De la même manière que celle qui a permis la construction de la suite $(f_j)_{j=1,\ldots,S}$, on construit une suite $(g_j)_{j=1,\ldots,S}$ d'éléments de $\mathcal{A}(K)$ tels que :

$$g_j = 1 \text{ au voisinage de } c_j$$

$$\operatorname{supp} g_j \subset \mathring{\mathfrak{Q}}_j .$$

On note $K_j = \{x \in K,\ g_j(x) = 1\}$.

Lemme 3.10 : Il existe S éléments de B, représentés par des fonctions $h_j \in \mathcal{A}(G)$ $(j = 1,\ldots,S)$ tels que :

(1) $h_j - 1 \in (g_j - 1)\mathcal{I}(\mathring{\mathfrak{Q}}_j)$ sur $\mathring{\mathfrak{Q}}_j$.

(2) $\forall x \in K,\ |h_j(x)| \leq 1$.

(3) $|h_j(x)| = 1 \Leftrightarrow x \in K_j$ et $h_j(x) = 1$.

Il s'agit du principe du maximum de Hugo Rossi. Fixons j.

On a : $\exists u_j \in B,\ \forall x \in \mathring{\mathfrak{Q}}_j,\ u_j(x) - g_j(x) \in \mathfrak{m}_1 \cdot \mathcal{A}(x) + \mathfrak{m}_2 \cdot \mathcal{A}(x)$.

($u_j(x) - g_j(x)$ désigne le germe en x de $u_j - g_j$).

Cet élément u_j de B, considéré comme fonction sur le spectre K de B, présente un maximum local sur K_j .

Posons $P_j = K \cap \mathring{\mathfrak{Q}}_j$.

On a $K_j \cap C_K P_j = \phi$. D'autre part K_j et $C_K P_j$ sont deux compacts disjoints de K. Reprenons mot pour mot la preuve du principe du maximum [10] :

$\exists f_1^j,\ldots,f_{m_j}^j \in B$ (on les considère comme des éléments de $\mathcal{A}(K)$), tels que

$$(f_1^j,\ldots,f_{m_j}^j)(K_j) = \mathcal{K}_1$$

$$(f_1^j,\ldots,f_{m_j}^j)(C_K P_j) = \mathcal{K}_2$$

où $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$ sont deux compacts disjoints de $\mathbb{C}^{m_j}$. Soient $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ deux voisinages compacts de $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$ dans $\mathbb{C}^{m_j}$. Posons

$U = (\mathbb{C} \times \mathcal{O}_1) \cup (\mathbb{C} \times \mathcal{O}_2) \cup (\{z, \operatorname{Re} z < 0\} \times \mathbb{C}^{m_j})$. U contient $\sigma(u_j - 1,\ f_1^j,\ldots,f_{m_j}^j)$.

Appliquons le lemme d'Arens-Calderon, σ désignant le spectre mutuel ;

$\exists f^j_{m_j+1},\ldots,f^j_{N_j}$, dans B, tels que, si $\Sigma = \sigma(u_j - 1, f^j,\ldots,f^j_{N_j})$,

$$\pi(\tilde{\Sigma}) \subset U \ .$$

($\tilde{\Sigma}$ enveloppe polynomialement convexe de Σ; π : projection sur les m_j+1 premières coordonnées).

Soit Δ_o un ouvert polynomialement convexe de $\mathbb{C}^{N_j+1}$ tel que :

$$\tilde{\Sigma} \subset \Delta_o \subset \pi^{-1}(U).$$

Posons $\Delta_1 = \Delta_o \cap \pi^{-1}(\mathbb{C}\times\mathcal{O}_1)$

$$\Delta_2 = \Delta_o \cap \pi^{-1}((\mathbb{C}\times\mathcal{O}_2) \cup ((\mathrm{Re}\ z<0)\times\mathbb{C}^{m_j}))$$

La résolution d'un problème de Cousin permet de trouver :

$$h_1 \in \mathcal{O}_{N_j+1}(\Delta_1),\ h_2 \in \mathcal{O}_{N_j+1}(\Delta_2) \ ,$$

telles que :

$$\forall\, Z \in \Delta_1 \cap \Delta_2 \ , \ \frac{\mathrm{Log}\, z}{z} = -\, h_1(Z) + h_2(Z), \text{ où } Z = (z, z_1, z_2, \ldots, z_{N_j}) \ .$$

On définit alors une fonction F holomorphe sur Δ_o par :

* sur Δ_1 : $F(z,z_1,z_2,\ldots,z_{N_j}) = z\, e^{z h_1(z,z_1,\ldots,z_{N_j})}$.
* sur Δ_2 : $F(z,z_1,z_2,\ldots,z_{N_j}) = e^{z h_2(z,z_1,\ldots,z_{N_j})}$

On vérifie l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que $|F - \varepsilon| \geq \varepsilon$ sur Σ. On pose alors $h_j = H(u_j - 1, f^j_1,\ldots,f^j_{N_j})$ où $H(z) = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon - F(z)}$. Cet élément de B est défini grâce au calcul symbolique . On vérifie immédiatement (2) et (3) .
D'autre part, sur $\Delta_o \cap \pi^{-1}((\mathbb{C}\times\mathcal{O}_1)\cup((\mathrm{Re}\ z<0)\times\mathbb{C}^{m_j}))$, on peut écrire :

$F(z,z_1,\ldots,z_{N_j}) = z.G(z,z_1,z_2,\ldots,z_{N_j})$. Or si $f_1,f_2,..,f_m \in \mathcal{A}(K)$, si leurs images dans $\mathcal{F}(K)$, $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m$ sont dans B, si H est holomorphe au voisinage de $\sigma(f_1,f_2,\ldots,f_m)$, alors $H(f_1,f_2,\ldots,f_m) \in \mathcal{A}(K)$; de plus,

l'image dans $\mathfrak{F}(K)$ de $H(f_1,f_2,\ldots,f_m)$ est l'élément de B : $H(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m)$ défini par la calcul symbolique. [10].

On applique ce résultat ici à G et aux éléments de $\mathcal{A}(K)$:

$$(u_j - 1,\ f_1^j,\ f_2^j,\ldots,f_{N_j}^j)\ . \quad \blacksquare$$

Prouvons maintenant le théorème .
Nous utiliserons la suite $(f_j)_{j\in\{1,\ldots,S\}}$ déjà construite. D'après le lemme 3.5, $\exists F_j \in B$, $\forall j = 1,\ldots,S$,

$$F_j \equiv f_j(\mathbb{C}\mu_1.\mathcal{A}(\mathring{\mathbb{Q}}_j) + \mathbb{C}\mu_2.\mathcal{A}(\mathbb{Q}_j))$$

Il résulte de la construction des h_j :

$$\lim_{k\mapsto\infty} (h_j^k F_j) = f_j \quad \text{dans } \mathfrak{F}(K) \text{ (voir [10])} .$$

(Il suffit, pour tout $a\in K$, de trouver un pavé $\mathbb{Q}_a$, satisfaisant aux lemmes 3.1 à 3.5, tel que :

$$\lim_{k\to\infty} \|\rho_{\mathbb{Q}_a}(h_j^k F_j - f_j)\|_{\mathcal{C}(\mathbb{Q}_a)} = 0) .$$

Associons à l'élément $s \in \mathfrak{F}(K)$ la suite $(\rho_j(s))_{j=1,\ldots,S}$ d'éléments de $\mathcal{C}(\mathbb{Q}_j)$.

Il existe (lemme 3.5) une constante C dépendant du recouvrement $(\mathbb{Q}_j)_{j=1,\ldots,S}$ telle que :

$$\forall j = 1,\ldots,S,\ \exists\ Z_j \in B\ ,$$

$$\begin{cases} \|Z_j\|_B \le C\|\rho_j(s)\|_{B(\mathbb{Q}_j)} \\ Z_j\big|_{\mathbb{Q}_j} \text{ et } \rho_j(s) \text{ représentant le même élément de } B(\mathbb{Q}_j) . \end{cases}$$

On écrit : $s = \sum_1^S z_j f_j$

$$= \sum_1^S (f_j - h_j^k F_j) Z_j + \sum_1^S h_j^k F_j Z_j \quad (\text{dans } \mathfrak{F}(K)).$$

. Pour k assez grand, $\forall j = 1,\ldots,S$, $\|f_j - h_j^k F_j\|_{\mathcal{J}(K)} \leq \frac{1}{2CC_o S}$

. $\forall j = 1,\ldots,S$, $\|Z_j\|_{\mathcal{J}(K)} \leq C_o \|Z_j\|_B \leq C C_o \|s\|_{\mathcal{J}(K)}$

On a donc $s = s' + s''$

$$s' \in \mathcal{J}(K) \quad \|s'\|_{\mathcal{J}(K)} \leq \frac{1}{2} \|s\|_{\mathcal{J}(K)}$$

$$s'' \in B \quad \|s''\|_B \leq C \sup_j \|h_j^k F_j\|_B \cdot \|s\|_{\mathcal{J}(K)}$$

On en déduit le théorème par approximations successives. ∎

B.4 Etude du comportement en norme L^p des solutions localement intégrables de (1).

On fait les mêmes hypothèses que précédemment sur l'ensemble discret J. On appellera E_p $(1 \leq p < \infty)$ l'espace de Banach des solutions de (1) appartenant à $L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$. Le résultat de Yves Meyer déjà cité [9] permet d'identifier E_p et $L^p(D)$.

Supposons $(\omega_o, z_o, w_o) \in K$. Pour fixer les idées, prenons par exemple $(\omega_o, z_o, w_o) = (e,0,0)$. D'après les lemmes 3.1 à 3.5, il existe un pavé $\mathcal{Q}^o$ voisinage de (e,0,0) dans K, associé à $V^o \times D_1^o \times D_2^o$, voisinage de (e,0,0) dans $\Omega \times \mathbb{C}^2$ tel que :

$\exists (\alpha_i)_{i=1,\ldots,k}$, suite d'éléments de $A(V^o)$,

$\exists H_1^o,\ H_2^o \in \mathcal{O}_o(V^o \times D_1^o \times D_2^o)$, $\alpha_1(e) = \ldots = \alpha_k(e) = 0$ et

$z^k + \alpha_1(\omega) z^{k-1} + \ldots + \alpha_k(\omega) = M_1 H_1^o + M_2 H_2^o$ dans $V^o \times D_1^o \times D_2^o$.

Associons enfin à ce point (e,0,0) un pavé $\mathcal{Q} \leftrightarrow V \times D_1 \times D_2 \subset V_o \times D_1^o \times D_2^o$, pour lequel soient vérifiés, comme pour la pavé $\mathcal{Q} = \frac{1}{2}\mathcal{Q}^*$, les lemmes 3.1 à 3.5 .

On considèrera un recouvrement de K par des pavés du type précédent :

$$\mathcal{Q}_1,\ \mathcal{Q}_2, \ldots, \mathcal{Q}_S .$$

$$V(\omega_j,\ \varepsilon_j) \times D(z_j, r_j^{(1)}) \times D(w_j, r_j^{(2)}) = V_j \times D_j^{(1)} \times D_j^{(2)} \ .$$

$K \subset \mathcal{Q}_1^* \cup \mathcal{Q}_2^* \cup \ldots \cup \mathcal{Q}_S^*$; $\forall j \in \{1,\ldots,S\}$, définissons

$\varphi_j : \mathcal{Q}_j^* \to [0,1]$

$$\varphi_j = \alpha_j \ J_o^{-1}(\mathcal{Q}_j^*), \alpha_j(\omega_j) = 1 \ , \ \alpha_j \geq \frac{1}{2} \text{ sur } V(\omega_j, \varepsilon_j) \ .$$

On pose enfin $f_j = \dfrac{\varphi_j}{\sum_1^S \varphi_j}$ $\forall j = 1,\ldots,S$; $f_j \in \mathcal{A}(K)$. $\exists\, \nu_j \in \mathcal{M}$ telle que :

$\forall x \in K$, les germes en x de $\mathcal{G}\nu_j$ et f_j sont congrus modulo $\mathcal{G}\mu_1.\mathcal{A}(x) + \mathcal{G}\mu_2.\mathcal{A}(x)$.

Cela signifie,au voisinage de tout (ω_o, z_o, w_o) tel que $J_o(\omega_o, z_o, w_o) \in K$,

$(\omega\nu_j)\hat{}(z,w) \equiv f_j(\omega)$ (modulo $(\omega\mu_1)\hat{}(z,w)$, $(\omega\mu_2)\hat{}(z,w)$).

Lemme 4.1 : Soit $f(x,y) = P(x,y)\exp i(\lambda x + \mu y)$ une exponentielle polynôme solution de (1) .

$$\forall j = 1,\ldots,S,\ f * \nu_j = \hat{\nu}_j(\lambda,\mu).f \ .$$

$$f * \nu_j(x,y) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(\lambda(x-u)+\mu(y-v))}.P(x-u,y-v)d\nu_j(u,v).$$

$$= e^{i(\lambda x + \mu y)} \iint_{\mathbb{R}^2} P(x-u,y-v)e^{-i(\lambda u + \mu v)}d\nu_j(u,v) \ .$$

Fixons $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$(u,v) \mapsto (P(x-u,y-v) - P(x,y))e^{i(\lambda u + \mu v)}$ est une exponentielle polynôme solution de (1), correspondant au point (λ,μ) du spectre, s'annulant en (0,0).

Soit $\mathcal{Q}_i$ le pavé du recouvrement où se trouve

$(\omega_{pq},\ z_i + z_{pq},\ w_i + w_{pq})$, $z_i + z_{pq} + p = \lambda$, $w_i + w_{pq} + q = \mu$ (*), où

$\omega_{pq}(\alpha_i,\beta_i) = e^{-i(p\alpha_i + q\beta_i).2\pi}$. Si $\mathcal{Q}_i \overset{J_o}{\leftrightarrow} V_i \times D_i^{(1)} \times D_i^{(2)}$, dans $V = V_i \times D_i^{(1)} \times D_i^{(2)}$, au voisinage d'un point (ω_o, z_o, w_o),

$$(\omega\nu_j)\hat{}(z,w) = f_j(\omega) + (\omega\mu_1)\hat{}(z,w)h_1^{z_o}(\omega,z,w) + (\omega\mu_2)\hat{}(z,w)h_2^{z_o}(\omega,z,w).$$

Posons $c_j = f_j(\omega_{p\ q})$ où (p,q) est associé à (λ,μ) (*).

$(\nu_j - c_j\delta)\hat{}$ se décompose localement au voisinage de (λ,μ) suivant $\hat{\mu}_1$ et $\hat{\mu}_2$.

$(\nu_j - c_j\delta)\check{}$ est orthogonale aux exponentielles polynômes solutions de (1).

$(\nu_j)\check{}$ est orthogonale aux exponentielles polynômes solutions de (1) s'annulant en (0,0).

On a donc $\iint_{\mathbb{R}^2} P(x-u,y-v)e^{-i(\lambda u+\mu v)}\, d\nu_j(u,v) = P(x,y)\hat{\nu}_j(\lambda,\mu)$. ∎

Comme dans [10], nous allons avoir besoin d'un lemme de perturbation.

Soient $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k,\ \beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k)$ des mesures sur $\mathbb{T}^2$. Considérons les mesures sur $\mathbb{T}^2$:

$$\mu_z = z^k\delta + \alpha_1 z^{k-1} + \ldots + \alpha_k$$

$$\mu_w = w^k\delta + \beta_1 w^{k-1} + \ldots + \beta_k \quad (\text{où } \delta = \delta_{(0,0)}).$$

Désignons par $P_{p,q}(z)$, $Q_{p,q}(w)$ leurs coefficients de Fourier respectifs.

Soit $F_{p,q}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ engendré par les fonctions $x^i y^j e^{i(\lambda x+\mu y)}$, où λ est zéro de $P_{p,q}(z) = 0$ avec une multiplicité au moins égale à i+1, μ zéro de $Q_{p,q}(w) = 0$ avec une multiplicité au moins égale à j+1.

$\mathcal{S}$ désignera l'ensemble des sommes finies :

$$\sum_{(p.q)\in F} f_{p,q}(x,y)e^{i(px+qy).2\pi}, \text{avec } f_{p,q} \in F_{p,q}.$$

Lemme 4.2 : Supposons k fixé, ε fixé.

$\exists\alpha(k)$ tel que $\|\alpha_1\|,\ldots,\|\alpha_k\|,\ \|\beta_1\|,\ldots,\|\beta_k\| < \alpha(k)$ impliquent :

(1) $\forall z,w,t.q|z| = |w| = \varepsilon$, $\mu_z * \mu_w$ est inversible pour la convolution, d'inverse $d\lambda_{(z,w)}$.

(2) $\forall f \in \mathcal{S}$, il existe une unique famille de polynômes trigonométriques :

$(g_{i,j})_{\substack{i=0,\dots,k-1\\ j=0,\dots,k-1}}$ telle que :

$$f(x,y) = -\frac{1}{4\pi^2}\iint_{\substack{|z|=\varepsilon\\ |w|=\varepsilon}} \left(\sum g_{ij} z^i w^j * d\lambda_{z,w}\right)(x,y)\ e^{i(zx+wy)}\, dz\, dw, (x,y)\in \mathbb{R}^2 ;$$

③ $$\left(\iint_{[0,k]^2} |f(x,y)|^p dx\, dy\right)^{1/p} \sim \sum_{o}^{k-1}\sum_{o}^{k-1} \|g_{ij}\|_{L^p(\mathbb{T}^2)} \quad \forall f \in \mathcal{S}, \text{ pour } p \geq 1.$$

① est assuré dès que $\sum_1^k \|\alpha_i\| < 1$, $\sum_1^k \|\beta_i\| < 1$.

② Si $\alpha(k)$ est choisi assez petit,

$\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2$, les zéros de $P_{p,q}(z) = 0$ sont dans $\mathring{D}_z(0,\varepsilon)$, ceux de $Q_{p,q}(w) = 0$ dans $\mathring{D}_w(0,\varepsilon)$.

L'existence de la famille de polynômes trigonométriques $(g_{i,j})_{\substack{i=0,\dots,k-1\\ j=0,\dots,k-1}}$ associée à $f \in \mathcal{S}$ résulte du théorème des résidus, comme dans [10].

En effet, si $f_{p,q} \in F_{p,q}$, il existe un unique polynôme $H_{p,q}$ de degré au plus k-1 en z et w tel que :

$$f_{p,q}(x,y) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|z|=\varepsilon\\ |w|=\varepsilon}} \frac{H_{p,q}(z,w)}{P_{p,q}(z).Q_{p,q}(w)}\ e^{i(zx+wy)} dz\, dw, \quad (x,y)\in \mathbb{R}^2 .$$

③ Ce point résulte de ce que :

$$\left(\iint_{[0,k]^2} |h_{oo}(x,y) + \dots + x^{k-1}y^{k-1} h_{k-1,k-1}(x,y)|^p dx\, dy\right)^{1/p} \sim \sum_{o}^{k-1}\sum_{o}^{k-1} \|h_{i,j}\|_{L^p(\mathbb{T}^2)}$$

si les $h_{i,j}$ sont des fonctions de deux variables de période (1,0), (0,1). ∎

Posons $\omega_{p\ q} \in \Omega \quad (p,q) \in \mathbb{Z}^2$

$$\omega_{p\ q}(\alpha_i,\beta_i) = e^{-i(p\alpha_i + q\beta_i).2\pi} \qquad i = 1,\dots,N\ ,\ (p,q) \in \mathbb{Z}^2 .$$

A chaque pavé $\mathbb{Q}_j^*$ $(j = 1,\ldots,S)$ du recouvrement de K, on sait associer deux polynômes distingués, l'un en z, l'autre en w, $P^{(j)}$ et $Q^{(j)}$:

$$P^{(j)}(\omega,z) = z^{k_j} + \alpha_1^j(\omega) z^{k_j-1} + \ldots + \alpha_{k_j}^j(\omega)$$

$$Q^{(j)}(\omega,w) = w^{k_j} + \beta_1^j(\omega) w^{k_j-1} + \ldots + \beta_{k_j}^j(\omega).$$

(voir introduction du § IV et lemmes 3.1 à 3.5).

Soit E_o l'espace vectoriel des solutions de (1) de la forme :

$$\sum_{j=1}^{S} e^{i(z_j x + w_j y)} \sum_{(p,q)\in F_j \subset \mathbb{Z}^2} \sum_{\substack{J(\omega_{p,q},\lambda,\mu)\in \mathbb{Q}_j \\ P^{(j)}(\omega_{p\,q},\lambda-z_j) = Q^{(j)}(\omega_{p\,q},\mu-w_j)=0 \\ \hat{\mu}_i(\lambda+2p\pi,\mu+2q\pi)=0,\ i=1,2}} Q_{p,q}^{\lambda,\mu,j} e^{i((\lambda-z_j)x + (\mu-w_j)y)} e^{i(2p\pi x + 2q\pi y)}$$

où $Q_{p,q}^{\lambda,\mu,j}$ désigne un polynôme de degré en x strictement inférieur à la multiplicité de $\lambda - z_j$ comme zéro de $P^{(j)}(\omega_{p\,q},.)$, de degré en y strictement inférieur à la multiplicité de $\mu - w_j$ comme zéro de $Q^{(j)}(\omega_{p\,q},.)$, tel que $(x,y) \mapsto Q_{p,q}^{\lambda,\mu,j}(x,y) e^{i((\lambda+2p\pi)x + (\mu+2q\pi)y)}$ soit solution de (1).

Lemme 4.3 : E_o est dense dans l'espace des solutions L^2_{loc} de (1).

Soit $\nu \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$, telle que : $\forall j = 1,\ldots,S$, $\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$, $\forall (\omega_{p\,q},\lambda,\mu) \in J_o^{-1}(\mathbb{Q}_j)$ $t\text{-}q(\hat{\mu}_i(\lambda+2p\pi,\mu+2q\pi)=0$, $i = 1,2$; $P^{(j)}(\omega_{pq},\lambda-z_j) = Q^{(j)}(\omega_{p\,q},\mu-w_j) = 0$, $\forall Q_{p,q}^{\lambda,\mu,j}$ vérifiant les conditions précédentes,

$$\langle \nu, Q_{p,q}^{\lambda,\mu,j}(x,y) e^{i(2p\pi x+2q\pi y)} e^{i(\lambda x+\mu y)} \rangle = 0 .$$

Plaçons-nous dans la situation :

$$\begin{cases} (0,0) \text{ zéro de multiplicité k de } M_1(e,z,w) = M_2(e,z,w) = 0 \\ \mathbb{Q} = J_o(V \times D_1 \times D_2) \end{cases}$$

Dans $V \times D_1 \times D_2$:

$$\begin{cases} P(\omega,z) = z^k + \alpha_1(\omega)z^{k-1} + \ldots + \alpha_k(\omega) \\ Q(\omega,w) = w^k + \beta_1(\omega)w^{k-1} + \ldots + \beta_k(\omega) \ . \end{cases}$$

Soient $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$, tels que :

$$\begin{cases} (\omega_{p\ q},\lambda,\mu) \in V \times D_1 \times D_2 \\ M_1(\omega_{p\ q},\lambda,\mu) = M_2(\omega_{p\ q},\lambda,\mu) = 0 \end{cases}$$

Dans un voisinage de (λ,μ) inclus dans $D_1 \times D_2$, on peut écrire toute fonction analytique φ sous la forme :

$$\varphi(z,w) = \sum_1^\rho \varphi_i\, q_i^{(\lambda,\mu)}(z,w) + (\omega_{p\ q\ \mu_1})\hat{}(z,w)u(z,w) + (\omega_{p\ q\ \mu_2})\hat{}(z,\omega)v(z,w).$$

(ρ désigne la multiplicité de (λ,μ) comme zéro de $M_1(\omega_{p\ q},\lambda,\mu) = M_2(\omega_{p\ q},\lambda,\mu) = 0$; les $q_i^{(\lambda,\mu)}$ sont des polynômes de degré en z (resp. en w) strictement inférieur à la multiplicité de λ (resp. μ) comme zéro de $P(\omega_{p,q},\lambda)=0$ (resp. $P(\omega_{pq},\mu)=0$); les φ_i s'expriment comme des combinaisons linéaires des :

$$\frac{\partial^{\ell_1+\ell_2}}{\partial z^{\ell_1}\partial w^{\ell_2}}\varphi(\lambda,\mu) \qquad \ell_1 = 0,\ldots,k-1 \ , \ \ell_2=0,\ldots,k-1 \ .$$

L'hypothèse faite sur ν dans ce lemme implique, au voisinage de (λ,μ) :

$$(\overset{\vee}{\omega_{p\ q}\nu})\hat{} = (\omega_{p\ q}\mu_1)\hat{}u(z,w) + (\omega_{pq}\mu_2)\hat{}v(z,w).$$

D'après le résultat de [11], $\overset{\vee}{\nu} = \rho_1 * \mu_1 + \rho_2 * \mu_2$.

Donc $\forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$, solution de $\mu_1 * f = \mu_2 * f = 0$, $\nu(f) = 0$. ∎

Nous pouvons maintenant étudier le comportement à l'infini, en norme L^p, des solutions localement intégrables de (1).

Pour $j = 1,\ldots,S$, prolongeons les éléments α_p^j , β_p^j $(p = 1\ldots k_j)$, éléments de $A(V_j^*)$, en des éléments de $A(\Omega)$.

Les pavés $\mathbb{Q}_j$ du recouvrement peuvent être choisis assez petits (il s'agit en fait d'un bon choix de V_j) pour que l'on puisse supposer :

$$\forall j = 1,\dots,S,$$

$$\forall p = 1,\dots,k_j$$

$$\forall q = 1,\dots,k_j$$

$$\|\alpha_p^j\|_{A(\Omega)} < \alpha(k_j), \qquad \|\beta_p^j\|_{A(\Omega)} < \alpha(k_j)$$

Soient $\mu_{1,j},\dots,\mu_{k_j,j}$, $\nu_{1,j},\dots,\nu_{k_j,j}$, les mesures définies sur $\frac{\Gamma}{\mathbb{Z}^2} \subset \mathbb{T}^2$ de la manière suivante :

La masse de $\mu_{p,j}$ (resp. $\nu_{p,j}$) en $p_1(\alpha_1,\beta_1)+\dots+p_{N-2}(\alpha_{N-2},\beta_{N-2})$ est la somme des coefficients de Fourier de α_p^j (resp. β_p^j) aux points :

$$p_1(\alpha_1,\beta_1)+\dots+p_{N-2}(\alpha_{N-2},\beta_{N-2}) + (n_1,n_2),(n_1,n_2) \in \mathbb{Z}^2 .$$

Si $f \in E_o$, on voit immédiatement (lemme 4.1) :

$f * \nu_j(x,y) = e^{i(z_j x + w_j y)} \varphi(x,y)$, où $\varphi \in \mathcal{S}_j$, espace vectoriel associé, comme au lemme 4.2, aux polynômes $P^{(j)}$ et $Q^{(j)}$.

Désignons par $q_1^j, q_2^j,\dots,q_{k_j}^j$ une base de $\mathcal{B}(U_j)$ où $\cup_j \overset{J}{\underset{o}{\leftrightarrow}} \mathbb{Q}_j$, également base de $\mathcal{B}(U_j^*) \overset{J}{\underset{o}{\leftrightarrow}} \mathbb{Q}_j^*$

Soit $(x_o,y_o) \in 2\pi\mathbb{Z} \times 2\pi\mathbb{Z}$. Dans $\mathcal{B}(U_j^*)$,

$$e^{i(zx_o + wy_o)} \equiv \sum_1^{k_j} \rho_{m,X_o}^j(\omega) q_m^j(z,w) .$$

<u>Théorème 4.4</u> : <u>Soit</u> $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$. <u>Il existe une constante</u> $C_p > 0$, <u>telle que</u>, $\forall f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $\mu_1 * f = \mu_2 * f = 0 \Rightarrow \forall (x_o,y_o) \in 2\pi\mathbb{Z} \times 2\pi\mathbb{Z}$

$$\|f(.+x_o, .+y_o)\|_{L^p(D)} \leq C_p \|f\|_{L^p(D)} \left(\sum_1^S \sum_{m=1}^{k_j} \|\rho_{m,x_o}^j\|_{M_p(V_j)} \right)$$

<u>On rappelle</u> :

$$\alpha \in A(\Omega) \quad \|\alpha\|_{M_p(\Omega)} = \sup_{g \in A(\Omega)} \frac{|\mathcal{F}(\alpha . g)|_p}{|\mathcal{F}(g)|_p}$$

$$\alpha \in A(V) \quad V \subset \Omega , \quad \|\alpha\|_{M_p(V)} = \inf_{\substack{\tilde{\alpha}|_V \\ \tilde{\alpha} \in A(\Omega)}} \|\tilde{\alpha}\|_{M_p(\Omega)} .$$

Indépendamment des notations précédentes, posons :

$$f_j(x,y) = (f * \nu_j)(x,y) \quad (f \in E_o) .$$

On a :

$$f_j(x,y) = e^{i(z_j x + w_j y)} \sum_{(p,q)\in F} \Big[\frac{1}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|z|=r_j^{(1)} \\ |w|=r_j^{(2)}}} \frac{H^j_{p,q}(z,w)}{P^{(j)}_{pq}(z)\, Q^{(j)}_{p,q}(w)}$$

$$\times e^{i(zx+wy)} dz dw \Big] e^{i(2p\pi x + 2q\pi y)} ,$$

où $U_j = V_j \times D(z_j, r_j^{(1)}) \times D(w_j, r_j^{(2)})$. Notons $X_o = (x_o, y_o)$.

Nous noterons ρ^j_{m,X_o} les mesures associées aux éléments ρ^j_{m,X_o} de $A(V)$, prolongés en des éléments de $A(\Omega)$.

Dans $D(z_j, 2r_j^{(1)}) \times D(w_j, 2r_j^{(2)})$,

$$\sum_1^{k_j} \hat{\rho}^j_{m,x_o}(p,q) q^j_m(z,w) \equiv \sum_0^{k_j-1} \sum_0^{k_j-1} \hat{\sigma}^j_{m,n,X_o}(p,q)(z-z_j)^m (w-w_j)^n$$

$$(\text{modulo } P^{(j)}_{p,q}(z-z_j),\ Q^{(j)}_{p,q}(w-w_j))$$

où les σ^j_{m,n,x_o} sont des combinaisons linéaires (à coefficients ne dépendant que du recouvrement) des mesures ρ^j_{m,X_o} .

Comme $f \in E_o$,

$$f_j(x+x_o, y+y_o) = e^{i(z_j x + w_j y)} \sum_{(p,q)\in F} \Big[\frac{1}{(2i\pi)^2} \iint_{\substack{|z|=r_j^{(1)} \\ |w|=r_j^{(2)}}} e^{2i\pi(px+qy)} \times$$

$$\times \frac{H^j_{p,q}(z,w) \sum_0^{k_j-1} \sum_0^{k_j-1} \hat{\sigma}^j_{m,n,X_o}(p,q) z^m w^n}{P^{(j)}_{pq}(z) Q^{(j)}_{pq}(w)} e^{i(zx+wy)} dz\, dw \Big]$$

On utilise le point 3 du lemme 4.2, et le fait que les normes des endomorphismes de $L^p(\mathbb{T}^2)$ définis par convolution avec les σ^j_{m,n,X_o} sont contrôlées par les normes des σ^j_{m,n,X_o} dans $M_p(V_j)$ ([7] et [10]) pour conclure. ∎

B.5 Le lien entre la nature du spectre et le comportement asymptotique des solutions

Le théorème 4.4 est particulièrement intéressant dans le cas où p = 2. En effet, dans ce cas, si $V \subset \Omega$ désigne un voisinage compact connexe de ω_o, α un élément de A(V),

$$\|\alpha\|_{M_2(V)} = \sup_{\omega \in V} |\alpha(\omega)| .$$

Une conséquence du théorème 4.4 est alors :

Théorème 5.1 : Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) les zéros de $\hat{\mu}_1(z,w) = \hat{\mu}_2(z,w)$ sont réels.

(b) $\exists\, C > 0$, $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2) \text{ , } \mu_1 * f = \mu_2 * f = 0 \text{ , on ait}$$

$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2 \text{ , } \|f(. + 2p\pi, . + 2q\pi\|_{L^2(D)} \leq C(|p|^{k_1} + |q|^{k_2})\|f\|_{L^2(D)}$$

(b) ⇒ (a) Cette implication est triviale.
Si $\mu_1(z,w) = \mu_2(z,w) = 0$, $e^{-i(zx+wy)}$ est solution de $\mu_1 * f = \mu_2 * f = 0$.
Pour que (b) soit satisfait, il est nécessaire que z et w soient réels.

(a) ⇒ (b) Remarquons tout d'abord que :

$$(a) \Rightarrow \forall \omega \in \Omega,\ \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \text{ , } (\omega\mu_1)\hat{}(z,w) = (\omega\mu_2)\hat{}(z,w) = 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

C'est une conséquence du théorème de Kronecker et du lemme de Cartan rappelé dans [9] .

Il en résulte $sp(B) \subset \mathbb{T}^N$. En effet $sp(B) = \{(z_1,\dots,z_N) \in \mathbb{C}^N$ tels que $\exists\,(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $|z_i| = e^{\alpha_i u + \beta_i v}$, $i = 1,\dots,N$, et $\hat{\mu}_1(z_1,\dots,z_N) = \hat{\mu}_2(z_1,\dots,z_N) = 0\}$

Soit $(z_1,\dots,z_N) \in sp\,B$. On a $z_{N-1} = e^{-iz}$, $z_N = e^{-iw}$, ainsi que $\forall i = 1,\dots,N-2$, $z_i = \omega_i e^{-i(\alpha_i z + \beta_i w)}$. On a $(\omega\mu_1)\hat{}(z,w) = (\omega\mu_2)\hat{}(z,w) = 0 \Rightarrow (z,w) \in \mathbb{R}^2$. On a donc $(z_1,\dots,z_N) \in \mathbb{T}^N$.

Donc, si $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \neq 1$, $\lambda - z_N$ est analytique sur $\mathbb{C}^N$, et ne s'annule pas au voisinage de sp(B).

$\dfrac{1}{\lambda - z_N}$ est donc analytique au voisinage de sp(B).

L'élément de B défini par convolution avec la mesure $\lambda\delta_{o,o} - \delta_{1,o}$ est donc inversible dans B.

Nous travaillerons dorénavant avec un recouvrement de $sp(B) = K$ construit comme au § IV.

$\forall j \in \{1,\dots,S\}$, $\lambda - e^{iw}$ est inversible dans l'algèbre $\mathbf{B}(U_j)$. Soit $q_1^j, q_2^j,\dots,q_{k_j}^j$ une base de polynômes de l'algèbre $\mathbf{B}(U_j)$. Désignons par A_j la matrice $k_j - k_j$ à coefficients dans $A(V_j)$, telle que :

$$w\cdot\begin{pmatrix} q_1^j \\ \vdots \\ q_{k_j}^j \end{pmatrix} = A_j(\omega)\begin{pmatrix} q_1^j \\ \vdots \\ q_{k_j}^j \end{pmatrix} \text{ dans } (\mathbf{B}(U_j))^{k_j}.$$

$\forall \omega \in V_j$, $\lambda I - e^{iA_j(\omega)}$ est une matrice inversible. $\forall \omega \in V_j$, les valeurs propres de $e^{iA_j(\omega)}$ ont un module égal à 1. Il en résulte :

$\forall\, \omega \in V_j$, $A_j(\omega)$ n'a que des valeurs propres réelles. On peut écrire, ω étant fixé dans V_j,

$$A_j(\omega) = P_j(\omega)D_j(\omega)P_j^{-1}(\omega) + N_j(\omega)$$

où $N_j^{k_j} = 0$, et où D_j est une matrice diagonale réelle, P_j une matrice $k_j - k_j$, où les deux matrices $P_j\ D_j\ P_j^{-1}$ et N_j commutent.

Si $n \in \mathbb{N}$, calculons la norme de l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{k_j}$ défini par la matrice $e^{inA_j(\omega)}$.

$$\| e^{inA_j(\omega)} \| \leq \| e^{in P_j . D_j . P_j^{-1}} \| . \| \sum_0^{k_j - 1} \frac{(i)^q}{q!} (N_j(\omega))^q n^q \|$$

$$= \| P_j . e^{inD_j(\omega)} P_j^{-1} \| . \| \sum_0^{k_j - 1} \frac{(i)^q}{q!} (N_j(\omega))^q n^q \| .$$

Il existe une constante K_j telle que, pour tout $\omega \in V_j$, la norme de l'endomorphisme défini par $N_j(\omega)$ soit majorée par K_j .

Si $e^{inw} \equiv \sum_1^{k_j} \lambda_{m,j}^{(n)}(\omega) q_m^j(z,w)$ dans $\mathcal{B}(U_j)$, $\exists K_j'$, $\sum_1^{k_j} \| \lambda_{m,j}^{(n)} \|_\infty \leq K_j' n^{k_j}$. ∎

Lorsque le spectre $\Lambda = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2, \hat{\mu}_1(z,w) = \hat{\mu}_2(z,w) = 0\}$ d'un système du type (1) est réel, la croissance, lorsque $\sqrt{x_o^2 + y_o^2} \to +\infty$, de $\| \delta(x_o, y_o)^* \|_{\mathcal{L}(E_2, E_2)}$ est donc polynomiale .

Dans quel cas cette croissance est-elle en $O(1)$?

Avant d'énoncer le théorème 5.2 fournissant la réponse à ce problème, rappelons deux définitions :

<u>Définition 5.1</u> : $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ est dit uniformément discret si et seulement si il existe $\delta > 0$, $\forall X \in \Lambda, \forall Y \in \Lambda$, $X \neq Y \Rightarrow d(X,Y) \geq \delta$.

<u>Définition 5.2</u> : On appelle spectre du système (1), ou spectre apparent de (1) l'ensemble des points $(z,w) \in \mathbb{C}^2$, tels que $\hat{\mu}_1(z,w) = \hat{\mu}_2(z,w) = 0$.

On appelle spectre compactifié du système (1), l'ensemble des points $(z,w) \in \mathbb{C}^2$, tels qu'il existe $\omega \in \Omega$, $(\omega\mu_1)\hat{}(z,w) = (\omega\mu_2)\hat{}(z,w) = 0$.

<u>Théorème 5.2</u> : <u>Pour un système du type (1), les 4 propositions suivantes sont équivalentes</u> :

(1) $\| \delta(x_o, y_o)^* \|_{\mathcal{L}(E_2, E_2)} = \mathcal{O}(\sqrt{x_o^2 + y_o^2})$.

(2) $\| \delta(x_o, y_o)^* \|_{\mathcal{L}(E_2, E_2)} = O(1)$

③ Le spectre compactifié est réel et simple.

④ Le spectre apparent est réel, simple, uniformément discret.

① ⇒ ③

① implique, pour des raisons déjà vues lors de la preuve de (b) ⇒ (a) dans le théorème précédent, la réalité du spectre apparent. Les points de ce spectre apparent sont d'autre part simples (la multiplicité de (z,w) comme zéro de $M_1(e,z,w) = M_2(e,z,w) = 0$ est 1) car il ne peut y avoir de solution de la forme $P(x,y)e^{zx+wy}$ où P serait un polynôme non constant.

Supposons $M_1(\omega_o,z_o,w_o) = M_2(\omega_o,z_o,w_o) = 0$ (*), (z_o,w_o) étant un zéro isolé de (*) ayant la multiplicité k.

Si $(z_o,w_o) \notin \mathbb{R}^2$, $\exists D_1(z_o,r_1)$, $D_2(w_o,r_2)$ tels que :

- $D_1(z_o,r_1) \times D_2(w_o,r_2) \subset \mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2$
- $\forall \omega \in V$, voisinage suffisamment petit de ω_o dans $\mathbb{T}^N$, $M_1(\omega,z,w) = M_2(\omega,z,w) = 0$ a k.solutions (z_i,w_i), comptées avec leur multiplicité, dans $D_1(z_o,r_1) \times D_2(w_o,r_2)$.

D'après le théorème de Kronecker, $\exists (x_o,y_o) \in \mathbb{R}^2$ avec $\|\omega_o - \omega_{x_o,y_o}\|_{\mathbb{T}^N} < \varepsilon$. On peut donc trouver ω_{x_o,y_o} dans V. Il devrait y avoir dans $D_1(z_o,r_1) \times D_2(w_o,r_2)$ k points tels que $M_i(\omega_{x_o\ y_o},z,w) = 0 = M_i(e,z+x_o,w+y_o)$ $(i = 1,2)$; ce qui contredirait la réalité du spectre apparent.

Le spectre compactifié est donc également réel.

Supposons $M_1(\omega_o,z_o,w_o) = M_2(\omega_o,z_o,w_o) = 0$ avec la multiplicité k. Nous allons montrer $k = 1$. Reprenons les notations du lemme 4.2. Soit $\alpha(2)$ associé à $\varepsilon = 1$.

D'après le théorème de Kronecker, $\exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $M_1(\omega_{pq},z,w)$ et $M_2(\omega_{pq},z,w)$ aient k zéros communs distincts (du fait de la simplicité du spectre apparent) dans $D(z_o,\frac{\alpha(2)}{2}) \times D(w_o,\frac{\alpha(2)}{2})$.

Soit une solution de $\mu_1 * f = \mu_2 * f = 0$ de la forme :

$$f(x,y) = e^{i(z_o+2p\pi)x + (w_o+2q\pi)y)} (\lambda e^{i(z_1x + w_1y)} + \mu e^{i(z_2x + w_2y)})$$

où (z_1,w_1), (z_2,w_2) vérifient :

$$(z_1,w_1) \neq (z_2,w_2)$$

$$z_1 \in D(z_o,\frac{\alpha(2)}{2}),\ z_2 \in D(z_o,\frac{\alpha(2)}{2})$$

$$w_1 \in D(w_o,\frac{\alpha(2)}{2}),\ w_2 \in D(w_o,\frac{\alpha(2)}{2})$$

$$M_1(\omega_{pq},z_i,w_i) = M_2(\omega_{pq},z_i,w_i) = 0, \quad i = 1,2 .$$

On peut écrire cette solution sous la forme :

$$-\frac{1}{4\pi^2} e^{i((z_o+2p\pi)x + (w_o+2q\pi)y)} \iint_{\substack{|z|=\varepsilon \\ |w|=\varepsilon}} e^{i(zx+wy)} \times$$

$$\times \frac{(\lambda+\mu)zw + z(-\lambda w_2-\mu w_1) + w(-\lambda z_2-\mu z_1) + \lambda z_2 w_2 + \mu z_1 w_1}{(z^2 - (z_1+z_2)z + z_1z_2)(w^2 - (w_1+w_2)w + w_1w_2)}\, dz\, dw .$$

On introduit les mesures sur $\mathbb{T}^2$:

$$\alpha_1 = -(z_1+z_2)\delta,\ \alpha_2 = z_1z_2\delta,\ \beta_1 = -(w_1+w_2)\delta,\ \beta_2 = w_1w_2\delta .$$

On utilise alors l'argument de perturbation du lemme 4.2(③).
Posons $g(x,y) = f(x,y)\exp(-i[z_o+z_1)x-(w_o+w_1)y])$.

On a $\|g\|_{L^2([0,2]\times[0,2])} \leq C_\varepsilon(|\lambda+\mu| + |\lambda w_2 + \mu w_1| + |\lambda z_2 + \mu z_1| + |\lambda z_2 w_2 + \mu z_1 w_1|)$

Si $x_o \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a :

$$\|g(.+x_o,.)\|_{L^2([0,2]\times[0,2])} \geq C'_\varepsilon|\lambda + \mu e^{i(z_2-z_1)x_o}|$$

On prend $\lambda = 1$ $\mu = -1$.

Lorsque x_o est fixé, pour h assez petit

$$|1 - e^{ihx_o}| \geq \frac{|x_o|}{2}|h|$$

D'autre part $\|g(.+x_o,.)\|_{L^2([0,2]\times[0,2])} \leq C\|\delta_{(x_o,0)}*.\|_{\mathcal{L}(E_2,E_2)} \|g\|_{L^2([0,2]^2)}$

On a alors, en posant $|z_1 - z_2| = h \quad |w_1 - w_2| = k$,

$$C'_\varepsilon \frac{|x_o|}{2}|h| \leq CC_\varepsilon(|k| + |h| + \frac{\alpha(2)}{2}(|h| + |k|))\mathcal{O}(|x_o|)$$

$$C'_\varepsilon \frac{|y_o|}{2}|k| \leq CC_\varepsilon(|k| + |h| + \frac{\alpha(2)}{2}(|h| + |k|))\mathcal{O}(|y_o|)$$ (par un raisonnement similaire) ; donc

$$C'_\varepsilon \inf(\frac{|x_o|}{2}, \frac{|y_o|}{2})(|h| + |k|) \leq C_\varepsilon(1 + \frac{\alpha(2)}{2})(|h| + |k|)\mathcal{O}((|x_o|^2 + |y_o|^2)^{1/2})$$

On aboutit à une contradiction lorsque l'on divise par $|h| + |k|$ et que l'on fait tendre $(|x_o|^2 + |y_o|^2)^{1/2}$ vers l'infini .

On a donc $k = 1$.

Le spectre compactifié est simple.

(3) ⇒ (4)

Il suffit de montrer que le spectre apparent est uniformément discret.

Soient (x_n, y_n), (x'_n, y'_n) deux suites de points du spectre apparent telles que :

* $\forall n \in \mathbb{N}$, $(x_n, y_n) \neq (x'_n, y'_n)$

* $\lim_{n \mapsto \infty} |x_n - x'_n| + |y_n - y'_n| = 0$

On pose $x_n = 2\pi p_n + \sigma_n \qquad y_n = 2\pi q_n + \tau_n$

$x'_n = 2\pi p_n + \sigma'_n \qquad y'_n = 2\pi q_n + \tau'_n$

On peut supposer $\sigma_n \mapsto \sigma_o$, $\sigma'_n \mapsto \sigma_o$.

$\tau_n \mapsto \tau_o$, $\tau'_n \mapsto \tau'_o$.

Quitte à extraire une sous-suite, on peut aussi supposer $\omega_{p_n\, q_n} \mapsto \omega$ dans Ω.

En passant à la limite, on verrait :

$$M_1(\omega, \sigma_o, \tau_o) = M_2(\omega, \sigma_o, \tau_o) = 0$$

Or, si $\omega_{p_n\, q_n}$ est assez voisin de ω, $M_1(\omega_{p_n\, q_n}, z, w) = M_2(\omega_{p_n\, q_n}, z, w) = 0$ a deux solutions distinctes aussi voisines que l'on veut de (σ_o, τ_o) ; ce qui contredit la simplicité du spectre compactifié.

(4) ⇒ (3)

Le spectre apparent est réel; il en est de même du spectre compactifié. Soit (ω_o, z_o, w_o) tel que $M_1(\omega_o, z_o, w_o) = M_2(\omega_o, z_o, w_o)$, la multiplicité d'intersection étant k.

Supposons $k > 1$.

Si $\|\omega - \omega_o\|_\Omega < \eta(\varepsilon)$, $M_1(\omega, z, w) = M_2(\omega, z, w) = 0$ a au moins deux solutions distinctes $(z_1^\varepsilon, w_1^\varepsilon)$, $(z_2^\varepsilon, w_2^\varepsilon)$ dans $D(z_o, \frac{\varepsilon}{2}) \times D(w_o, \frac{\varepsilon}{2})$. On prend $\omega = \omega_{p_n\, q_n}$,

$\|\omega_{p_n\, q_n} - \omega_o\|_\Omega < \eta(\frac{1}{n})$.

$$(x_n, y_n) = (p_n + z_1^{(1/n)}, q_n + w_1^{(1/n)})$$

$$(x'_n, y'_n) = (p_n + z_2^{(1/n)}, q_n + w_2^{(1/n)})$$

On aurait $\lim_{n \to \infty} (|x_n - x'_n| + |y_n - y'_n|) = 0$. Le spectre apparent ne serait pas uniformément discret. On a donc $k = 1$.

(3) ⇒ (2)

Le théorème 4.4 fournit immédiatement ce résultat ($p = 2$). ∎

Donnons avant de l'étudier plus en détail, un exemple de système satisfaisant aux hypothèses du théorème 5.2.

$$S\begin{cases} \mu_1 = a_1(\delta_{0,0}+\delta_{1,1}) + b_1(\delta_{1,0} + \delta_{0,1}) + \lambda i(\delta_{\frac{1}{2}+\alpha, \frac{1}{2}+\beta} - \delta_{\frac{1}{2}-\alpha, \frac{1}{2}-\beta}) \\ \mu_2 = a_2(\delta_{0,0}+\delta_{1,1}) + b_2(\delta_{1,0} + \delta_{0,1}) - \lambda i(\delta_{\frac{1}{2}+\alpha, \frac{1}{2}+\beta} - \delta_{\frac{1}{2}-\alpha, \frac{1}{2}-\beta}) \end{cases}.$$

- $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$
- $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$.
- α, β irrationnels .

On a dans ce cas $\Omega = \mathbb{T}$. Posons $\omega = e^{i\theta}$, on a :

$$(\omega\mu_1)\hat{}(z,w) = (\omega\mu_2)\hat{}(z,w) = 0$$

$$\Rightarrow (a_1 + a_2)(1 + e^{-iz})(1 + e^{-iw}) = 0$$

$$\Rightarrow z = (2k+1)\pi \quad \text{ou} \quad w = (2k+1)\pi \ .$$

Supposons $z = (2k+1)\pi$.

On cherche w tel que $(1 - e^{-iw})(a_1 - b_1) = -\lambda i(-1)^k 2i \sin(\beta + (2k+1)\pi\alpha + \theta)e^{-i\frac{w}{2}}$.

Ce qui revient à résoudre les équations :

$$u \in \mathbf{R} \ , \quad \sin\frac{w}{2} = \frac{\lambda}{a_1 - b_1} \sin\beta\,(w+u), \ u = \frac{(2k+1)\pi\alpha+\theta}{\beta} \ ;$$

ou encore, si $w' = (w+u)\beta$,

$$\sin\left(\frac{w'}{2\beta} - \frac{u}{2}\right) = \frac{\lambda}{a_1-b_1} \sin w' \ .$$

Comme $\beta < \frac{1}{2}$, $\beta' = \frac{1}{2\beta}$ est un irrationnel strictement supérieur à 1 .

Dans [10], est étudié l'équation de convolution :

$$f(x+\beta') - f(x-\beta)) = \varepsilon(f(x+1) - f(x-1)).$$

Lorsque $\varepsilon \in \mathbf{R}$ et $|\varepsilon| < 1$, la croissance des solutions en norme L^2 sur $\mathbf{R}$ de cette équation est en $O(1)$.

On en déduit :

$\frac{\lambda}{a_1-b_1} \in \mathbf{R}$ et $|\lambda| < |a_1 - b_1| \Rightarrow$ le spectre apparent de (S) est réel, simple uniformément discret.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où le spectre apparent du système (1) est réel et uniformément discret. On appellera Λ ce spectre.

<u>Lemme 5.3</u> : <u>Soit</u> $p \in [1,+\infty[$; $\exists\ K_p > 0$ <u>telle que pour toute fonction</u> φ <u>de la forme</u> :

$$\varphi(x,y) = \sum_{\Lambda_o \text{ partie finie de } \Lambda} c_{\lambda,\mu}\, e^{i(\lambda x + \mu y)} \ ,$$

<u>on ait</u> $\|\varphi\|_{L^p(D)} \geq K_p \left(\sum_{\Lambda_o} |c(\lambda,\mu)|^p\right)^{1/p}$.

Nous utiliserons le recouvrement de $K = sp(B)$ par les pavés $\mathbb{Q}_j$ introduits au § IV.

Sur $\mathbb{Q}_j \leftrightarrow V(\omega_j,\varepsilon_j) \times D(z_j, r_j^{(1)}) \times D(w_j, r_j^{(2)})$, $\quad f_j \geq \frac{1}{2S}$; ici

$f_1, f_2, \ldots, f_S$ désignent les fonctions associées à la partition de l'unité correspondant au recouvrement de K par les $\mathcal{Q}_j$, $j = 1, \ldots, S$.

On peut écrire :

$$\varphi(x,y) = \sum_{1\le j\le S} e^{i(z_j x + w_j y)} \sum_{\substack{(p,q)\in F_j \\ \omega_{pq}\in V_j^* \\ M_1(\omega_{pq},z_{pq},w_{pq})=0 \\ M_2(\omega_{pq},z_{pq},w_{pq})=0}} \sum_{(\omega_{pq},z_{pq},w_{pq})\in J_o^{-1}(\mathcal{Q}_j^*)} c^j_{p,q} \times$$

$$\times\, e^{i((2p\pi+z_{pq})x+(2q\pi+w_{pq})y)}$$

On a

$$\varphi * \nu_j(x,y) = \sum_j e^{i(z_j x + w_j y)} \sum_{\substack{(p,q)\in F_j \\ \omega_{pq}\in V_j^*}} c^j_{p,q}\, \hat{\nu_j}(\omega_{pq}, z_j+z_{pq}, w_j+w_{pq}) \times$$

$$\times\, e^{i((2p\pi+z_{pq})x+(2q\pi+w_{pq})y)} \quad ; \text{ on a :}$$

$$\Big(\sum_{\substack{(p,q)\in F_j \\ \omega_{pq}\in V_j}} |c^j_{p,q}|^p \big(\frac{1}{2S}\big)^p\Big)^{1/p} \le K_{j,p}\, \|\varphi * \nu_j\|_{L^p([0,1]\times[0,1])} \qquad \text{(lemme 4.2)}$$

$$\le K'_{j,p}\, \|\varphi\|_{L^p(D)} \quad . \quad \blacksquare$$

Nous allons étudier plus en détail le cas $p = 2$.
Si Δ est un domaine mesurable borné de $\mathbf{R}^2$, définissons :

$$\mathcal{B}(\Delta) = \{f \in L^2(\mathbf{R}^2)\ ,\ \operatorname{Supp} \hat{f} \subset \Delta\}$$

$$\mathcal{B}_1(\Delta) = \{f \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^2),\ \hat{f} \in \mathcal{D}(\mathring{\Delta})\}$$

Il résulte de l'uniforme discrétion du spectre Λ ([8]) l'existence de constantes C et C' telles que :

$$\forall f \in \mathcal{B}_1(\Delta),\ \Big(\sum_{\Lambda} |f(-\lambda,-\mu)|^2\Big)^{1/2} \le C \|\hat{f}\|_{L^2(\Delta)} = C' \|f\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \ .$$

Ce qui permet de prolonger l'opérateur de $\mathcal{B}_1(\Delta)$ dans $\ell^2(\Lambda)$:

$$f \mapsto (f(-\lambda,-\mu))_{(\lambda,\mu)\in\Lambda}$$

en un opérateur continu T_Δ de $\mathcal{B}(\Delta)$ dans $\ell^2(\Lambda)$.

Théorème 5.4 : Λ réel, simple, uniformément discret. Soit Δ un domaine mesurable borné de $\mathbb{R}^2$, d'intérieur non vide. Les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $T_o : E_2 \mapsto L^2(\Delta)$ est un isomorphisme

$\varphi \mapsto \varphi . \chi_\Delta$ (χ_Δ désigne la fonction indicatrice de Δ).

(2) $\exists K_1(\Delta)$, $K_2(\Delta)$ tel que :

$$\forall \varphi , \varphi(x,y) = \sum_{\Lambda_o \subset \Lambda} c_{\lambda,\mu} e^{i(\lambda x+\mu y)} , \text{ où } \Lambda_o \text{ est une partie finie de } \Lambda,$$

$$K_1 \Big(\sum_{\Lambda_o} |c_{\lambda,\mu}|^2 \Big)^{1/2} \leq \|\varphi\|_{L^2(\Delta)} \leq K_2 \Big(\sum_{\Lambda_o} |c_{\lambda,\mu}|^2 \Big)^{1/2}$$

et les fonctions φ de la forme ci-dessus sont denses dans $L^2(\Delta)$.

(3) L'opérateur T_Δ de $B(\Delta)$ dans $\ell^2(\Lambda)$ est un isomorphisme d'espaces de Banach.

(1) $\Rightarrow$ (2)

La densité, dans E_2, des combinaisons d'exponentielles, solutions de (1) implique leur densité dans $L^2(\Delta)$. L'existence de K_1 et K_2 pour le domaine D résulte, pour K_1, du lemme 5.3, pour K_2 de l'uniforme discrétion du spectre (voir par exemple [8]).

(2) $\Rightarrow$ (3)

Considérons une combinaison d'exponentielles à fréquences dans Λ, $\sum_{\Lambda_o} c(\lambda,\mu) e^{i(\lambda x + \mu y)}$.

Soit $\rho \in \mathcal{D}(\Delta)$.

Soit $f_\rho \in \mathcal{B}_1(\Delta)$, $\hat{f}_\rho = \rho \sum_{\Lambda_o} c(\lambda,\mu) e^{i(\lambda x + \mu y)}$; on a

$$\sum_{\Lambda_o} f_\rho(-\lambda,-\mu) c(\lambda,\mu) = \iint_\Delta \rho(x,y) \Big\| \sum_{\Lambda_o} c(\lambda,\mu) e^{i(\lambda x + \mu y)} \Big\|^2 dx\, dy \text{ ; donc}$$

$$\Big| \sum_{\Lambda_o} f_\rho(-\lambda,-\mu) c(\lambda,\mu) \Big| \leq \|T_\Delta(f_\rho)\|_{\ell^2(\Lambda)} \cdot \frac{1}{K_1} \Big\| \sum_{\Lambda_o} c(\lambda,\mu) e^{i(\lambda x+\mu y)} \Big\|_{L^2(\Delta)} .$$

On fait tendre $\rho \mapsto 1$ dans $L^2(\Delta)$. La densité dans $L^2(\Delta)$ des fonctions $\sum_{\Lambda_o} c(\lambda,\mu)e^{i(\lambda x+\mu y)}$ assure :

$$\forall f \in \mathcal{B}(\Delta),\ \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{1}{K_1} \|T_\Delta(f)\|_{\ell^2(\Lambda)} \qquad (*)$$

D'après (*), T_Δ est un opérateur d'image fermée. Montrons la densité de $\mathrm{Im}\ T_\Delta$ dans $\ell^2(\Lambda)$.

Soit $(c_{\lambda,\mu})_{(\lambda,\mu)\in\Lambda} \in \ell^2(\Lambda)$, $\sum_{(\lambda,\mu)\in\Lambda} \bar{c}(\lambda,\mu)f(-\lambda,-\mu) = 0$, $\forall f \in \mathcal{B}_1(\Delta)$.

On choisit ε assez petit et Λ_o assez grand pour que $(\sum_{\Lambda\setminus\Lambda_o} |c(\lambda,\mu)|^2)^{1/2} < \varepsilon$

Comme précédemment, prenons $f_\rho \in \mathcal{B}_1(\Delta)$,

$$\hat{f}_\rho(x,y) = \chi_\Delta(x,y)\rho(x,y) \sum_{\Lambda_o} c(\lambda,\mu)e^{i(\lambda x+\mu y)}$$

$$\sum_{\Lambda_o} \bar{c}(\lambda,\mu)f_\rho(-\lambda,-\mu) = -\sum_{\Lambda\setminus\Lambda_o} \bar{c}(\lambda,\mu)f_\rho(-\lambda,-\mu).$$

$$= \iint_\Delta \rho(x,y)\Big|\sum_{\Lambda_o} c(\lambda,\mu)e^{i(\lambda x+\mu y)}\Big|^2 dx\,dy.$$

On aurait :

$$\iint_\Delta \rho(x,y)\Big|\sum_{\Lambda_o} c(\lambda,\mu)e^{i(\lambda x+\mu y)}\Big|^2 dx\,dy \leq \varepsilon C K_2 (\sum_{\Lambda_o} |c(\lambda,\mu)|^2)^{1/2}, \text{ donc :}$$

$$(\sum_{\Lambda} |c(\lambda,\mu)|^2)^{1/2} \leq \varepsilon C K_2 .$$

Mais ε était arbitraire ; donc :

$$\forall (\lambda,\mu) \in \Lambda,\ c(\lambda,\mu) = 0$$

(3) ⇒ (1)

On vérifie que (3) implique l'existence de $K_1(\Delta)$ telle que, pour tout polynôme trigonométrique à fréquences dans Λ,

$$(\sum_{\Lambda_o} |c(\lambda,\mu)|^2)^{1/2} \leq K\Big\|\sum_{\Lambda_o} c(\lambda,\mu)e^{i(\lambda x+\mu y)}\Big\|_{L^2(\Delta)} \qquad (**)$$

On en déduit que l'image de T_o est fermée. Cette image est d'autre part dense ; en effet, soit $\varphi \in L^2(\Delta)$, telle que :

$$\text{, } \operatorname{supp}\varphi \subset \Delta \text{ et } \iint_{\Delta} \varphi(u,v)\Big(\sum_{\Lambda_o} c(\lambda,\mu)e^{-i(\lambda u+\mu v)}\Big)\,du\,dv = 0 \text{ pour toute}$$

famille $(c_{\lambda,\mu})_{(\lambda,\mu)\in\Lambda_o}$, où Λ_o est une partie finie de Λ ;

Ecrivons $\varphi = \hat{f}$; on a $f(-\lambda,-\mu) = 0$ pour tout couple (λ,μ); donc $\varphi=0$ (T_Δ est injectif).

T_o est un opérateur injectif : soit en effet φ_n suite d'exponentielles, ou de combinaisons linéaires d'exponentielles, convergent dans E_2 vers un élément φ tel que $\varphi|_\Delta = 0$. De $\lim_{n\mapsto\infty} \|\varphi_n\|_{L^2(\Delta)} = 0$, on déduit, grâce à (**), $\lim_{n\mapsto\infty} \varphi_n = 0$. ∎

Avant d'énoncer un corollaire de ce théorème, rappelons les notions de densité supérieure et de densité inférieure attachée à une partie uniformément discrète de $\mathbf{R}^2$ [6] .

Soit U un compact de mesure 1 dont la frontière est de mesure nulle dans $\mathbf{R}^2$; on définit :

$n^+(rU)$: plus grand nombre d'éléments de Λ situés dans un translaté de rU .

$n^-(rU)$: plus petit nombre d'éléments de Λ situés dans un translaté de rU.

$$\text{On définit } D^+(U,\Lambda) = \lim_{r\mapsto\infty} \sup \frac{n^+(rU)}{r^2}$$

$$D^-(U,\Lambda) = \lim_{r\mapsto\infty} \inf \frac{n^-(rU)}{r^2}$$

Corollaire : Lorsque le spectre Λ est uniformément discret et réel, on a, dès que U désigne un compact de $\mathbf{R}^2$ de mesure 1 dont la frontière est de mesure nulle :

$$D^+(U,\Lambda) = D^-(U,\Lambda) = \frac{m(D)}{4\pi^2} = \frac{1}{2\pi^2} \quad .$$

Cela résulte du fait que D vérifie le point (3) du théorème 5.4 et des théorèmes (3) et (4) de Landau [6].

Remarquons enfin qu'un domaine fondamental associé à un spectre réel uniformément discret ((1), théorème 5.4) le reste pour un spectre perturbé légèrement.

Proposition 5.5 : Soit Λ une partie uniformément discrète de $\mathbf{R}^2$, de pas d telle que, pour un domaine mesurable borné Δ de $\mathbf{R}^2$,

* les polynômes trigonométriques à fréquences dans Λ sont denses dans $L^2(\Delta)$.

* $\exists K_1, K_2 \quad K_1 (\sum_{\Lambda_o} |c_{\lambda,\mu}|^2)^{1/2} \leq \| \sum_{\Lambda_o} c_{\lambda,\mu} e^{i\lambda x+\mu y} \|_{L^2(\Delta)} \leq K_2 (\sum_{\Lambda_o} |c_{\lambda,\mu}|^2)^{1/2}$

si Λ_o désigne une partie finie de Λ, $(c_{\lambda,\mu})$ un élément de $\ell^2(\Lambda)$.

Alors il existe $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \frac{d}{2}$, dépendant de Δ, tel que les mêmes propriétés restent vraies pour Δ et $\Lambda_1 = \{(\lambda + r_{\lambda,\mu}, \mu + s_{\lambda,\mu})(\lambda,\mu) \in \Lambda\}$ où $(\lambda,\mu) \mapsto (r_{\lambda,\mu}, s_{\lambda,\mu})$ est une application de $\Lambda \mapsto [-\varepsilon,\varepsilon]^2$.

Prouvons la densité des polynômes trigonométriques à fréquences dans Λ_1 dans $L^2(\Delta)$. Soit $f \in L^2(\Delta)$; $\exists g = \sum_{\Lambda_o \subset \Lambda} c_{\lambda,\mu} e^{i\lambda x + \mu y}$, telle que

$$\| f - g \|_{L^2(\Delta)} \leq \frac{1}{2} \| f \|_{L^2(\Delta)}$$

On a donc $\| \sum_{\Lambda_o} c_{\lambda,\mu} e^{i(\lambda x + \mu y)} \|_{L^2(\Delta)} \leq \frac{3}{2} \| f \|_{L^2(\Delta)}$.

D'après les hypothèses faites sur Δ et Λ ; on a :

$$(*) \qquad (\sum_{\Lambda_o} |c_{\lambda,\mu}|^2)^{1/2} \leq \frac{3}{2K_1} \| f \|_{L^2(\Delta)} .$$

$$(**) \quad \| \sum_{\Lambda_o} c_{\lambda,\mu} e^{i(\lambda x+\mu y)} - \sum_{\Lambda_o} c_{\lambda,\mu} e^{i((\lambda+r_{\lambda,\mu})x+(\mu+s_{\lambda,\mu})y)} \|_{L^2(\Delta)} \leq$$

$$\leq K_2 (e^{K(\Delta).\varepsilon} - 1)(\sum_{\Lambda_o} |c_{\lambda,\mu}|^2)^{1/2} \quad (K(\Delta) \text{ est une constante liée à } \Delta) ;$$

$$(***) \quad \| \sum_{\Lambda_o} c_{\lambda,\mu} e^{i(\lambda x+\mu y)} - \sum_{\Lambda_o} c_{\lambda,\mu} e^{i((\lambda+r_{\lambda,\mu})x + (\mu + s_{\lambda,\mu})y)} \|_{L^2(\Delta)} \leq$$

$$\leq \frac{3K_2}{2K_1} (e^{K(\Delta).\varepsilon} - 1) \| f \|_{L^2(\Delta)} .$$

Si ε est choisi suffisamment petit, le membre de droite de l'inégalité est $< \frac{1}{2}\|f\|_{L^2(\Delta)}$. L'existence de $K_1(\varepsilon)$ et $K_2(\varepsilon)$ résulte des inégalités (* à ***).

Un problème intéressant à résoudre serait la recherche des domaines fondamentaux associés à un système d'équations de convolution $\mu_1 * f = 0$ et $\mu_2 * f = 0$, correspondant à un spectre réel, simple, uniformément discret. La résolution de ce problème n'est pas simple comme en témoigne ce qui se passe dans le cas où

$$S' \begin{cases} \mu_1 = a_1\delta_{0,0} + b_1\delta_{1,0} + c_1\delta_{0,1} + d_1\delta_{1,1} \\ \mu_2 = a_2\delta_{0,0} + b_2\delta_{1,0} + c_2\delta_{0,1} + d_2\delta_{1,1} \end{cases}$$

Posons $\sigma_1 = (b_1c_2 - b_2c_1) - (a_2d_1 - a_1d_2)$.

$\sigma_2 = c_1a_2 - a_1c_2$

$\sigma_3 = b_2d_1 - b_1d_2$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall f \in E_2$, $\sigma_1(\delta_{1,0} * f) = \sigma_2 f + \sigma_3(\delta_{2,0} * f)$.

Soient λ_1 et λ_2 les deux racines (supposées distinctes) de $\sigma_2 x^2 - \sigma_1 x + \sigma_3 = 0$. On a, si $n \geq 2$:

$$\delta_{(-n,0)} * f = \frac{\lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1}(\lambda_2 f - \delta_{-1,0} * f) + \frac{\lambda_2^n}{\lambda_2 - \lambda_1}(\delta_{-1,0} * f - \lambda_1 f).$$

Il en résulte :

$([0,1] \times [0,1]) \cup ([n, n+1] \times [0,1])$ est, lorsque $n \geq 2$, un domaine fondamental attaché au système (S') si et seulement si

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n \neq 1 \quad .$$

B.6 Compléments : calcul de $\|e^{in\varphi}\|_{M_p(V)}$, $V \subset \mathbb{T}^N$, $\varphi : V \mapsto \mathbb{R}$.

L'étude du comportement à l'infini des solutions d'une équation de convolution associée à une mesure atomique à support fini [10], ou d'un système d'équations du type étudié par J. Delsarte (cf. § précédents) conduit lorsque le spectre est réel, simple, uniformément discret, à des calculs de normes $\|e^{in\varphi}\|_{M_p(V)}$, où V désigne un voisinage compact d'un point du sous-groupe Ω de $\mathbb{T}^N$, et φ une fonction de A(V), réelle, de classe C^∞ sur $\mathring{V}$. Enonçons donc les résultats suivants :

Lemme 6.1 : Soit V un voisinage compact connexe d'un point $a \in \mathbb{T}^k$, $k \geq 1$. Soit $\varphi \in A(V)$, réelle, admettant un prolongement C^∞ à $\mathbb{T}^k$, réel . Soit $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, $p = +\infty$ éventuellement ; il existe une constante K_p telle que

$$\|e^{in\varphi}\|_{M_p(V)} \leq K_p\, n^{k\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|} .$$

Supposons $p \leq 2$.

Soit $\tilde{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{T}^k)$ $\tilde{\varphi} = \varphi$ sur V. On va majorer $\|e^{in\tilde{\varphi}}\|_{M_p(\mathbb{T}^k)}$.

Soit $T_{1,1}$ l'opérateur $\ell^1(\mathbb{Z}^k) \mapsto \ell^1(\mathbb{Z}^k)$ défini comme suit :

$$(c_\xi)_{\xi \in \mathbb{Z}} \mapsto g = \sum_\xi c_\xi e^{i\xi.x} \in A(\mathbb{T}^k) \mapsto \mathcal{F}(e^{in\tilde{\varphi}}.g) \in \ell^1(\mathbb{Z}^k)$$

Cet opérateur est un opérateur continu de norme inférieure à $\|e^{in\tilde{\varphi}}\|_{A(\mathbb{T}^k)}$; on a donc :

$$\|T_{1,1}\| \leq C_p |n|^{\frac{k}{2}} \quad [4] .$$

On peut aussi considérer cet opérateur : $\ell^2(\mathbb{Z}^k) \cap \ell^1(\mathbb{Z}^k) \mapsto \ell^1(\mathbb{Z}^k) \cap \ell^2(\mathbb{Z}^k)$

$$\| \qquad\qquad \| \qquad\qquad \|$$

$$\ell^1(\mathbb{Z}^k) \qquad\qquad \ell^1(\mathbb{Z}^k)$$

Les normes étant cette fois les normes ℓ^2 ; on a cette fois :

$$\|T_{2,2}\| \leq 1 = \|e^{in\tilde{\varphi}}\|_\infty$$

On applique le théorème de Riesz-Thorin (cf. [5] , p.97).

Le raisonnement est identique dans le cas où $p > 2$. ∎

Lemme 6.2 : Soit $V \subset \mathbb{T}$ un voisinage compact connexe de $a \in \mathbb{T}$. Soit $\varphi \in A(V)$, de classe C^∞ sur V, réelle; $p \geq 1$, $p \neq 2$, $p < +\infty$; alors

$$\|e^{in\varphi}\|_{M_p(V)} = O(1) \Rightarrow \varphi \text{ affine sur } V .$$

On a $\|e^{in\varphi}\| = \inf_{\substack{\tilde{\varphi} \in A(\mathbb{T}) \\ \tilde{\varphi}|_V = e^{in\varphi}}} \|\tilde{\varphi}\|_{M_p(\mathbb{T})}$; ceci implique

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \exists \tilde{\varphi}_n \in A(\mathbb{T}) \quad \left| \begin{array}{l} \tilde{\varphi}_n|_V = e^{in\varphi} \\ \|\tilde{\varphi}_n\|_{M_p(\mathbb{T})} \leq \|e^{in\varphi}\|_{M_p(V)} + \frac{1}{n} \leq O(1) + \frac{1}{n} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \leq K \end{array} \right.$$

On a donc : $\forall g \in A(\mathbb{T})$, $|\mathcal{F}(\tilde{\varphi}_n . g)|_p \leq K |\mathcal{F}g|_p$ (*) .

Supposons que sur $J \subset V$, $\varphi'' > \rho$. Soit $h \in A(\mathbb{T})$, de moyenne 1, à support dans J.

Envisageons dans un premier temps le cas où $p > 2$;

Posons $\left| \begin{array}{l} g_n = h e^{-in\varphi} \text{ dans V} \\ g_n = 0 \text{ dans } C_\Omega V \qquad \Omega = \mathbb{T} \end{array} \right.$

Les notations sont celles de [4] .

$$\|h\, e^{-in\varphi}\|_{PM(\mathbb{T})} \leq \|h\|_{A(\mathbb{T})} \cdot \|1_J\, e^{-in\varphi}\|_{PM(\mathbb{T})} \leq \frac{c(\rho, h)}{\sqrt{r}} .$$

(On applique le lemme de Van der Corput utilisé par exemple dans [4]).

On a donc : $|\mathcal{F}(h e^{-in\varphi})|_\infty \leq \frac{c(\rho, h)}{\sqrt{n}}$; ce qui implique

$$|\mathcal{F}g_n|_p^p = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} |\hat{g}_n(\xi)|^p \leq \left(\frac{c(\rho, h)}{\sqrt{n}}\right)^{p-1} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} |\hat{g}_n(\xi)| \ ; \text{ or on a également}$$

$$\sum_{\xi\in\mathbb{Z}} |\hat{g}_n(\xi)| = \sum_{\substack{\xi\in\mathbb{Z}\\ |\xi|>M}} |\hat{g}_n(\xi)| + \sum_{\substack{\xi\in\mathbb{Z}\\ |\xi|\le M}} |\hat{g}_n(\xi)| \le \left(\frac{2}{M}\right)^{1/2} \|h'+nh\varphi'\|_{L^2(J)} + (2M+1)^{1/2}$$

$$\le C(h)\sqrt{n} \quad \text{(choix de M)} .$$

On a donc :

$$\|h\|_{L^1(\mathbb{T})} \le |\mathcal{F}(e^{-in\varphi} h \tilde{\varphi}_n)|_p \le K(C(\rho,h))^{\frac{p-1}{p}} (C(h))^{\frac{1}{p}} (\sqrt{n})^{\frac{2}{p}-1}$$

Comme $\frac{2}{p} - 1 < 0$, on aboutit à une contradiction .

En raisonnant de la même manière, on montrerait que $\varphi'' \le -\rho$ est impossible sur J .

Plaçons nous maintenant dans le cas ou $p < 2$:

On prend cette fois $g = h$ et on réapplique (*)

$$|\mathcal{F}(e^{in\varphi}.h)|_p \le K|\mathcal{F} h|_p$$

$$|\mathcal{F}(e^{in\varphi} h)|_2^2 \le |\mathcal{F}(e^{in\varphi}.h)|_p \, |\mathcal{F}(e^{in\varphi}.h)|_{p'}, \frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1 .$$

$$|\mathcal{F}(e^{in\varphi}.h)|_2^2 \le K|\mathcal{F} h|_p \, |\mathcal{F}(e^{in\varphi}.h)|_{p'}$$

$$\le K|\mathcal{F}h|_p \, C_1(\rho,h)(\sqrt{n})^{\frac{2}{p'}-1} \quad \text{(calcul précédent); donc}$$

$$\left(\int_J |h|^2\right)^{1/2} \le K^{1/2} |\mathcal{F}h|_p^{1/2} \sqrt{C_1(\rho,h)} \; n^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{2}} .$$

Comme $p' > 2$, $\frac{1}{p'} - \frac{1}{2} < 0$; on aboutit encore à une contradiction.

Le lemme est donc démontré. ∎

Lemme 6.3 : Soit $p \in]1,2[$. Soit V un voisinage compact connexe de $a \in \mathbb{T}^k$, $k \ge 1$, $a = (a_1,\ldots,a_k)$.
Soit $\varphi \in A(V)$, C^∞ sur $\check{V}$, telle que $\varphi(\omega,a_2,\ldots,a_{k-1})$ ne soit pas affine sur $\{\omega_1 \in \mathbb{T},\ (\omega_1,a_2,\ldots,a_{k-1}) \in V\}$. Alors $\lim_{|n|\to\infty} \|e^{in\varphi}\|_{M_p(V)} = +\infty$.

Par définition de la norme dans $M_p(V)$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\quad \exists \widetilde{\varphi}_n \in A(\mathbb{T}^k),\ \widetilde{\varphi}_n|_V = e^{in\varphi}\ ,\ \|\widetilde{\varphi}_n\|_{M_p(\mathbb{T}^k)} \le \|e^{in\varphi}\|_{M_p(V)} + \frac{1}{n}\ .$$

Si φ est une fonction définie sur $\mathbb{T}$, ou $\mathbb{T}^k$, on notera de la même manière φ et la fonction définie sur $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}^k$, par : $\phi(x) = \varphi(e^{ix})$.

Prenons $\widetilde{\varphi}_n \in A(\mathbb{T}^k)$. Posons $\widetilde{\psi}_n = \widetilde{\varphi}_n(a_1,\omega_1,a_2\omega_2,\ldots,a_k\omega_k)$; on a

$$\|\widetilde{\varphi}_n\|_{M_p(\mathbb{T}^k)} = \|\widetilde{\psi}_n\|_{M_p(\mathbb{T}^k)}\ .$$

Les calculs effectués lors de la preuve du lemme 6.2 montrent :

$$\|\widetilde{\psi}_n(\omega_1,e,e\ldots,e)\|_{M_p(\mathbb{T})} \ge \rho\,|n|^{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|} \quad (\text{où } \rho \text{ ne dépend que de } \varphi).$$

(Cela résulte des hypothèses faites sur φ).

On a $\|\psi_n\|_{M_p(\mathbb{T}^k)} = \|\psi_n\|_{M_p(\mathbb{R}^k)}$. Notons D le groupe $(\mathbb{R},+)$ muni de la topologie discrète .

$$\begin{aligned}\|\psi_n(x,0,0,\ldots,0)\|_{M_p(\mathbb{R})} &= \|\psi_n(\omega_1,e_1,\ldots,e)\|_{M_p(\mathbb{T})}\\ &= \|\psi_n(x_1,0,\ldots,0)\|_{M_p(D)}\\ &\ge \rho\,|n|^{1/p-1/2}\end{aligned}$$

(Théorème 2.3 [1]) .

Or, si G désigne un groupe abélien discret, H un sous-groupe de G, f un élément de $M_p(G)$, h la restriction de f au sous-groupe H, on a :

$$h \in M_p(H),\ \|h\|_{M_p(H)} \le C\|f\|_{M_p(G)}\ .$$

On applique ce résultat à $G = D^k$ et $H = D\times\{0\}\times\ldots\times\{0\}$, on a donc

$$\|\widetilde{\psi}_n(x_1,\ldots,x_k)\|_{M_p(D^k)} \ge C_1\|\widetilde{\psi}_n(x_1,0,\ldots,0)\|_{M_p(D)} \ge C_1\rho\,|n|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\ .$$

Une première application de ces résultats à l'étude du comportement à l'infini des solutions L^p_{loc} d'une équation de convolution $\mu * f = 0$, où μ désigne une mesure à support fini, est le théorème suivant, en dimension 1 :

Théorème 6.1 : Soit μ une mesure atomique à support fini dans $\mathbb{R}$. Soit $p \in]1,2[$. On désigne par E_p l'espace de Banach des solutions L^p_{loc} de $\mu * f = 0$; alors

$$\|\delta(x_o) * \cdot\|_{\mathcal{L}(E_p,E_p)} = O(1) \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R},\ \mathrm{Supp}\,\mu \subset \beta\mathbb{Z} .$$

Nous supposerons, comme dans [10] ,

$$\mu = c_o \delta_o + \sum_{k=1}^{M} A_k \delta_{a_k} + c_1 \delta_1 , \quad c_o \cdot c_1 \neq 0$$

$$0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_M = 1 .$$

Nous noterons Γ le groupe engendré par Supp μ .

$$\Gamma = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}\alpha_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}\alpha_N .$$

Pour faciliter les notations, nous supposerons $\alpha_N = 1$, comme dans [10] . Soit $\{\mathcal{Q}_j\}_{j=1,\ldots,S}$ un recouvrement adapté au spectre de l'algèbre B étudié dans [10] ; le pavé $\mathcal{Q}_j$ correspond par J_o , à $V_j \times D_j$, où $V_j \subset \Omega = \mathbb{T}^{N-1}$, $D_j \subset \mathbb{C}$.

L'hypothèse du théorème 6.1 et le théorème 4 de [10], impliquent :

$$\forall j \in \{1,\ldots,S\} , \exists \rho^j_o, \rho^j_1, \ldots, \rho^j_{N-1} \in \mathbb{R} , \text{ tels que :}$$

$$\left.\begin{array}{l} z \in D_j \\ \omega \in V_j \\ \omega \mapsto (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \ldots, e^{i\theta_{N-1}}) \\ (\omega\mu)\hat{}(z) = 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \omega \in V_j \\ \text{et} \\ z = \rho^j_o + \sum_{1}^{N-1} \rho^j_q \theta_j \end{array}\right.$$

(C'est une conséquence des résultats cités et des lemmes précédents).

Soit $I_j \subset [-\pi_1 + \pi]^{N-1}$ correspondant à V_j .

On a :

$$\forall \theta_1,\ldots,\theta_{N-1} \in I_j,\ c_o + c_1 e^{i(\rho_o^j + \sum_1^{N-1} \rho_q^j \theta_j)} + \sum_{k=1}^{M} A_k\, e^{i\left[\sum_1^{N-1} p_q^k \theta_q - a_k(\rho_o^j + \sum_1^{N-1} \rho_q^j \theta_q)\right]} = 0$$

avec $a_k = \sum_1^N p_q^k \alpha_q$, $k = 1,\ldots,M$.

Deux cas sont possibles :

. ou tous les ρ_q^j, $(q = 1,\ldots,N-1)$, sont nuls .

. ou il existe $k(j) \in \{1,\ldots,M\}$, tel que $a_{k(j)} \cdot \rho_q^j = p_q^{k(j)}$.
$(q = 1,\ldots,N-1)$.

Dans le premier cas, les points du spectre correspondant au pavé $\mathbb{Q}_j$ sont de la forme $\rho_o^j + 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Dans le second cas, ce sont des points de forme $\rho_o^j + \frac{2m\pi}{a_{k(j)}}$.

D'autre part, dans le premier cas, tous les points $\rho_o^j + 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, sont des points du spectre, dans le second cas, il existe $q(j) \in \{1,\ldots,N-1\}$ tel que $p_{q(j)}^{k(j)} \neq 0$; les points $\rho_o^j + \frac{2m p_{q(j)}^{k(j)}}{a_{k(j)}}$ sont des points du spectre de μ.

Le spectre devant être uniformément discret, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, et ν mesure atomique portée par $\mathbb{Z}\theta$, telle que μ divise ν au sens de la convolution .

Lemme 6.4 : Soit ν une mesure portée par $\mathbb{Z}\theta$. Soient μ_1 et μ_2 deux mesures atomiques à support fini telles que $\nu = \mu_1 * \mu_2$.

$\exists \alpha \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{Z}^*$, $\mathrm{Supp}\,\mu_1 \subset \alpha + \frac{\theta}{p}\mathbb{Z}$.

Soit G le groupe engendré par $\mathrm{Supp}\,\mu_1 \cup \mathrm{Supp}\,\mu_2 \cup \theta\mathbb{Z}$.

$$\mu_1 = \sum_{\alpha \in \Gamma_1 \subset G} c_\alpha^{(1)} \delta_\alpha \ .$$

$$\mu_2 = \sum_{\alpha \in \Gamma_2 \subset G} c_\alpha^{(2)} \delta_\alpha$$

Soit $G' = G/\theta.\mathbb{Z}$.

Désignons, si $\alpha \in \mathbf{R}$, par $\bar{\alpha}$ la classe de α modulo θ.

$$\sum_{\alpha \in \Gamma_1} c_\alpha^{(1)} \delta_{\bar{\alpha}} * \sum_{\alpha \in \Gamma_2} c_\alpha^{(2)} \delta_{\bar{\alpha}} = \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \Big) \delta_{\bar{0}} \qquad \text{si } \nu = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \, \delta_{k\theta} \ .$$

$G' = T \oplus L$ | T groupe de torsion de G'

$L = \mathbb{Z}\,\bar{\omega}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}\,\bar{\omega}_e$.

Soit $\tilde{\alpha}$ la classe de α modulo T dans G'/T .

$$\sum_{\alpha \in \Gamma_1} c_\alpha^{(1)} \delta_{\tilde{\alpha}} * \sum_{\alpha \in \Gamma_2} c_\alpha^{(2)} \delta_{\tilde{\alpha}} = (\Sigma\, c_k).\delta_{\tilde{0}} \qquad (1)$$

Soit χ un caractère de $M(G'/T)$;

$$\chi(\delta_{\bar{\omega}_1}) = z_1, \ldots, \chi(\delta_{\bar{\omega}_\ell}) = z_\ell \ . \qquad |z_1| = |z_2| = \ldots = |z_\ell| = 1$$

$$(1) \Rightarrow z_1^{-n_1} \ldots z_\ell^{-n_\ell} P_1(z_1, \ldots, z_\ell) z_1^{-m_1} \ldots z_\ell^{-m_\ell} P_2(z_1, \ldots, z_\ell) = \Sigma\, c_k \ .$$

(P_1 et P_2 sont des éléments de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_\ell]$).

Cas 1 $\Sigma\, c_k \neq 0$

$P_1(z_1, \ldots, z_\ell)$ et $P_2(z_1, \ldots, z_\ell)$ sont des monômes.

On en déduit le résultat.

Cas 2 $\Sigma\, c_k = 0$

On a $P_1(z_1, \ldots, z_\ell) \equiv 0$ ou $P_2(z_1, \ldots, z_\ell) \equiv 0$.

Le support de μ_1 ou celui de μ_2 est contenu dans $\frac{\theta}{p'}\mathbb{Z}$, pour un certain $p' \in \mathbb{Z}^*$. ∎

BIBLIOGRAPHIE

[1] Karel de Leeuw : "On L^p multipliers", Ann. of Math. 81, 364-379 (1965).

[2] A. Douady : "Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné". Ann. Inst. Fourier 16 (1966) p.1-95.

[3] J. P. Kahane : "Pseudopériodicité et séries de Fourier lacunaires" Ann. Scient. E.N.S. 3ème série, 79 (1962), 93-150.

[4] J. P. Kahane : "Séries de Fourier absolument convergentes" Springer, 1970 (50).

[5] I. Katznelson : "An introduction to harmonic analysis" Willey et Sons, 1968.

[6] H. J. Landau : "Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions" Acta Math. 1967 (117).

[7] R. Larsen : "An introduction to the theory of multipliers" Springer 175, 1971.

[8] Y. Meyer : "Algebraic numbers and harmonic analysis" North Holland 1972.

[9] Y. Meyer : "Remarques sur un théorème de J. Delsarte" Séminaire d'Analyse harmonique Orsay, 1974.

[10] Y. Meyer : "Comportement asymptotique des solutions de certaines équations de convolution". Séminaire d'analyse harmonique Orsay 1974.

[11] A. Yger : "Une généralisation d'un théorème de J. Delsarte" Séminaire d'analyse harmonique, Orsay, 1976-77.

C H A P I T R E III

FONCTIONS DEFINIES DANS LE PLAN ET VERIFIANT CERTAINES PROPRIETES DE MOYENNE

[cet article est paru dans les annales de l'Institut Fourier Vol. XXXI, Fasc. 3 (1981)]

Soit f une fonction définie et continue dans $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$. Désignons par F(x,r) la moyenne superficielle de la fonction f sur une sphère de centre x et de rayon r ; soient a et b deux nombres réels distincts, tous deux strictement positifs.

Dans [3], Delsarte a montré que, si le rapport $\frac{a}{b}$ ne prenait pas certaines valeurs exceptionnelles, toute fonction f vérifiant, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, f(x) = F(x,a) = F(x,b), était alors une fonction harmonique dans $\mathbb{R}^n$.

Plaçons nous maintenant dans le cas n = 2.

Pour tout entier N supérieur ou égal à 2, soit P_N le polygone régulier de $\mathbb{R}^2$, centré en l'origine, dont les sommets sont les points $(\cos \frac{2k\pi}{N}, \sin \frac{2k\pi}{N})$, k variant de 1 à N. Lorsque f désigne une fonction définie et continue dans $\mathbb{R}^2$, r un réel strictement positif, appelons $G_N(f,x,r)$ (resp. : $H_N(f,x,r)$) la moyenne des valeurs de la fonction f sur les sommets du polygone $x+r\,P_N$ (resp. : sur l'intérieur du polygone $x + r\,P_N$). Toute fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ et dont la valeur en tout point x de $\mathbb{R}^2$, est égale, pour tout r > o, au nombre $G_N(f,x,r)$, est en fait un polynome harmonique, de degré N-1 ; le même résultat subsiste si $G_N(f,x,r)$ est remplacé par $H_N(f,x,r)$ ([1], [6],[19])

Dans ce travail, nous nous placerons dans $\mathbb{R}^2$ et dans la situation où le polygone est un carré (N=4).

Nous envisagerons deux types de problèmes :

A) Problèmes du type 1 :

L'un des problèmes fondamentaux qui se posent pour un système de deux équations de convolution dans $\mathbb{R}^2$, depuis le contre exemple proposé par Gurevich [8], est celui de la synthèse spectrale : y a-t'il totalité des exponentielles polynomes solutions d'un système d'équations

$\mu_1 * f = \mu_2 * f = 0$ ($\mu_1 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$, $\mu_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$) dans l'espace des solutions continues de ce système ? Berenstein et Taylor, dans [2], ont donné, pour de tels systèmes, une condition suffisante non seulement pour qu'il y ait synthèse, mais encore pour que l'on dispose d'un moyen de représentation de toutes les solutions de classe C^∞ à l'aide des solutions élémentaires.

Il s'agit de s'assurer en premier lieu de ce que la sous variété de $\mathbb{C}^2$ définie par $V(\mu_1,\mu_2) = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2, \hat{\mu}_1(Z) = \hat{\mu}_2(Z) = 0\}$ est bien de dimension 0, puis ensuite de ce que les composantes connexes de l'ensemble où $|\hat{\mu}_1|$ et $|\hat{\mu}_2|$ sont, en un certain sens, simultanément petits, sont bornées et de taille controlable. On dit alors que le couple $(\hat{\mu}_1(Z), \hat{\mu}_2(Z))$ est un couple de fonctions analytiques "Slowly decreasing" pour le poids $p(Z) = |\mathrm{Im}Z| + \mathrm{Log}(1+\|Z\|)$, où $|\mathrm{Im}Z| = |\mathrm{Im}z| + |\mathrm{Im}w|$.

Dans cette première partie, nous donnerons une condition suffisante pour qu'un couple $(\hat{\mu}_1(Z), \hat{\mu}_2(Z))$ (où $\mu_1 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2), \mu_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$) soit "Slowly decreasing" au sens de Berenstein-Taylor pour le poids p déjà considéré (lorsque la variété $V(\mu_1,\mu_2)$ est de dimension 0) (Proposition 1-1), puis nous verrons comment, en combinant ce résultat avec les méthodes déjà utilisées dans [23], nous pourrons en déduire, dans le cas N = 4, la propriété de synthèse spectrale et le théorème de représentation des solutions pour les systèmes du type :

$$(*) \quad f(.) = G_4(f,.,1) = G_4(f,.,a) \quad (a \in]0,1[)$$

Nous aurons été au préalable amenés à étudier la géométrie de l'ensemble des couples (z,w) de $\mathbb{C}^2$ satisfaisant au système d'équations :

(E_a) $\cos z \cdot \cos w = \cos(a z) \cdot \cos(a w) = 1$ $(a \in]0,1[\setminus \mathbb{Q})$

Cette étude se poursuivra dans la deuxième partie (II).

B) Problèmes du type 2 :

Soient μ_1 et μ_2 deux distributions à support compact dans le plan. Existe-t'il, et à quelles conditions, un ouvert relativement compact tel que toute solution distribution du système $\mu_1 * f = \mu_2 * f = 0$ soit en fait C^∞ partout lorsqu'elle est de classe C^∞ sur cet ouvert ? Tel que toute solution du système nulle sur cet ouvert soit en fait nulle partout ?

Dans l'exemple étudié par J. Delsarte ([4], [12]), l'espace des solutions L^2_{loc} s'identifie à l'espace de Hilbert $L^2([0,2] \times [0,1])$; ce domaine $D = [0,2] \times [0,1]$ répond aux deux questions soulevées ci dessus. Il n'est pas question, pour les systèmes de la forme (*), de construire ce que l'on pourrait appeler un tel domaine fondamental. L'obstruction est ici que la variété $V(\mu_1,\mu_2)$ correspondante ne peut être incluse dans une bande de $\mathbb{C}^2$ de la forme $|\mathrm{Im}\ Z| \leq T$.
Cela résultera, on le verra, de l'étude géométrique des ensembles de couples de $\mathbb{C}^2$ vérifiant une équation du type (E_a).

Par contre nous serons en mesure de donner une réponse positive aux deux questions posées, si l'on arrive à montrer que l'ensemble des points de $\mathbb{C}^2$ où $|\hat{\mu}_1|$ et $|\hat{\mu}_2|$ sont simultanément petits (en un certain sens) se trouve dans un tube de $\mathbb{C}^2$ de la forme $|\mathrm{Im}\ Z| \leq T(1+\mathrm{Log}(1+\|Z\|))$.
Ce sera l'objet du théorème 3-1, qui n'est en fait qu'un raffinement du théorème permettant le passage du semi local au global dans les problèmes de cohomologie à croissance (voir [2], [5], [18]).

Dans l'étude des systèmes de la forme (*) (où a est irrationnel), les propriétés arithmétiques du réel a et les propriétés géométriques de la variété $V(\mu_1,\mu_2)$ sont très liées, comme on le verra.

Nous montrerons l'existence d'irrationnels pour lesquels les hypothèses du théorème 3-1 pour la variété $V(\mu_1,\mu_2)$ correspondant au système (*) ne seront pas vérifiées.

Il existe d'autres méthodes, comme on le verra par certains systèmes de la forme (**) $f(.) = H_4(f,.,1) = H_4(f,.,a)$ $(a \in]0,1[)$, pour donner une réponse positive aux deux questions posées en tête de ce paragraphe.

I Quelques problèmes liés au problème de la synthèse spectrale.

Dans la suite, p désignera toujours une fonction pluri sous harmonique sur $\mathbb{C}^n$, non identiquement égale à $-\infty$, telle que :

(i) $\forall\ Z \in \mathbb{C}^n$, $p(Z) \geq 0$.

(ii) $\mathrm{Log}(1+\|Z\|) = O(p(Z))$.

(iii) $\exists\ C > 0$, $\exists\ D > 0$ telles que :
$\forall\ Z \in \mathbb{C}^n$, $\forall\ \zeta \in \mathbb{C}^n$, $\|Z-\zeta\| \leq 1 \Rightarrow p(\zeta) \leq Cp(Z) + D$.

On notera $A(\mathbb{C}^n)$ l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^n$; si Ω désigne un ouvert de $\mathbb{C}^n$, on notera $A(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes sur Ω.

Comme dans [2], on notera :

$$A_p(\Omega) = \{F \in A(\Omega) \ ; \ \exists\ A > 0, \ \exists\ B > 0, \ \forall\ Z \in \Omega, \ |F(Z)| \leq Ae^{Bp(Z)}\}$$

Rappelons la définition d'un n-uplet de fonctions analytiques dans $\mathbb{C}^n$

"Slowly decreasing" au sens de Berenstein-Taylor pour le poids p.

ceci signifie :

(1) La variété analytique : $\{F_1 = F_2 = \ldots\ldots = F_n = 0\}$ est de dimension 0.

(2) $\exists\ \varepsilon > 0$, $\exists\ K > 0$, $\exists\ K_1 > 0$, $\exists\ K_2 > 0$, tels que les composantes connexes de l'ensemble $\{Z \in \mathbb{C}^n, \sum_{i=1}^{n} |F_i(Z)| < \varepsilon\ e^{-K.p(Z)}\}$ soient bornées, et que si Z et ζ sont deux points de l'une de ces composantes connexes, on ait : $p(Z) \leq K_1\ p(\zeta) + K_2$.

Nous nous placerons, pour fixer les idées, et parce que nous allons utiliser les résultats de Berenstein-Taylor dans ce cadre, dans le cas n = 2.

Proposition 1-1 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^2$

Soient $F_1 \in A_p(\mathbb{C}^2)$, $F_2 \in A_p(\mathbb{C}^2)$.

On suppose :

Il existe $\varepsilon > 0$, $K \geq 0$, $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ tels que :

(2i) Les composantes connexes rencontrant Ω de l'ensemble où $|F_1(Z)| + |F_2(Z)| + |\text{Jacobien}(F_1, F_2)(Z)| < \varepsilon\ e^{-Kp(Z)}$ sont bornées.

(2ii) Pour toute composante connexe $\mathcal{C}$ de cet ensemble rencontrant Ω, on a : $\forall\ Z \in \mathcal{C}$, $\forall\ \zeta \in \mathcal{C}$, $p(Z) \leq K_1\ p(\zeta) + K_2$.

Alors : $\exists\ \varepsilon > 0$, $\exists\ K' > 0$, $\exists\ K'_1 > 0$, $\exists\ K'_2 > 0$ tels que :

(3i) Les composantes connexes rencontrant Ω de l'ensemble où $|F_1(Z)| + |F_2(Z)| < \varepsilon'\ e^{-K'p(Z)}$ sont bornées.

(3ii) Pour toute composante connexe $\mathcal{C}'$ de cet ensemble rencontrant Ω, on a : $\forall Z \in \mathcal{C}'$, $\forall \zeta \in \mathcal{C}'$, $p(Z) \leq K'_1\, p(\zeta) + K'_2$.

Remarque 1 Les hypothèses impliquent la discrétion du spectre (variété des zéros communs de F_1 et F_2) ; dans le cas ou $\Omega = \mathbb{C}^2$, la conclusion du théorème signifie précisément que le couple (F_1, F_2) est "Slowly decreasing" au sens de Berenstein-Taylor.

Ce corollaire immédiat a été annoncé dans l'introduction sous le titre : Proposition 1-1.

Remarque 2 La proposition subsiste mot pour mot pour les n-uplets de fonctions analytiques dans $A_p(\mathbb{C}^n)$.

On notera désormais Jacobien(F_1, F_2) $(Z) = J\,[F_1, F_2]\,(Z)$.

Prouvons la proposition 1-1 :

Choisissons pour l'instant : $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$, $K' > K$.

(ε et K sont attachés au couple de fonctions analytiques(F_1, F_2) par la condition 2i)

Considérons une composante connexe rencontrant Ω de l'ensemble :

$$\{\, Z \in \mathbb{C}^2,\ |F_1(Z)| + |F_2(Z)| < \varepsilon'\, e^{-K'p(Z)} \,\}$$

Supposons que cette composante connexe contienne un point Zo tel que :

$$J\,[F_1, F_2]\,(Zo) > \frac{\varepsilon}{2}\, e^{-Kp(Zo)}.$$

Considérons un réel strictement positif $\varepsilon(Zo)$ de la forme $\lambda e^{-\mu p(Zo)}$ (λ et μ sont deux constantes positives ne dépendant que de ε, K, F_1, F_2) de manière à ce que :

$$\|Z-Zo\| < \varepsilon(Zo) \Rightarrow \left\| \begin{vmatrix} F^{Zo}_{1,1}(Z), & F^{Zo}_{1,2}(Z) \\ F^{Zo}_{2,1}(Z), & F^{Zo}_{2,2}(Z) \end{vmatrix} \right\| > \frac{\varepsilon}{4}\, e^{-Kp(Z)},$$

où $F^{Zo}_{1,1}$, $F^{Zo}_{1,2}$, $F^{Zo}_{2,1}$, $F^{Zo}_{2,2}$ sont des fonctions entières de $A_p(\mathbb{C}^2)$

définies par :

$$\forall\, Z \in \mathbb{C}^2 \begin{cases} F_1(Z) - F_1(Zo) = (z-zo)\, F^{Zo}_{1,1}(Z) + (w-wo)\, F^{Zo}_{1,2}(Z). \\ F_2(Z) - F_2(Zo) = (z-zo)\, F^{Zo}_{2,1}(Z) + (w-wo)\, F^{Zo}_{2,2}(Z). \end{cases}$$

L'existence de λ et μ est assurée par les conditions préliminaires imposées au poids p.

On a, pour tout Z dans la boule de centre Zo, et de rayon $\varepsilon(Zo)$:

$$\frac{\varepsilon}{4}\, e^{-K\,p(Z)}\ \|Z-Zo\| < (|F_1(Z)| + |F_2(Z)| + |F_1(Zo)| + |F_2(Zo)|) \times A e^{Bp(Z_o)}$$

Si l'on a pris soin de choisir ε' et K' de manière à ce que :

$$\varepsilon'\ e^{-K'p(Zo)} < \frac{\varepsilon}{8}\,(\lambda\ e^{-\mu p(Zo)}).e^{-Kp(Z)} \times \frac{1}{A}\ e^{-Bp(Z_o)}$$

(pour tout $Z \in \mathbb{C}^2$, tel que $\|Z-Zo\| < 1$),

on voit, quitte à améliorer à nouveau ce choix de ε' et de K', que la composante connexe étudiée contenant Zo se trouve en fait incluse complètement dans la boule de centre Zo et de rayon $\lambda\ e^{-\mu p(Zo)}$. Elle est bornée et satisfait bien sûr(3ii) (si $\lambda < 1$, ce que l'on peut toujours supposer, on peut prendre $K'_1 > C$, $K'_2 > D$, C et D étant les deux constantes intervenant dans l'énoncé de la propriété (iii) du poids p).

Les seules composantes connexes de

$$\{\, Z \in \mathbb{C}^2, |F_1(Z)| + |F_2(Z)| < \varepsilon'\ e^{-K'p(Z)} \}$$

restant à étudier sont celles rencontrant Ω et en tout point desquelles on ait :

$$|J\,[F_1, F_2]\,(Z)\ | < \frac{\varepsilon}{2}\ e^{-Kp(Z)}$$

Mais une telle composante est incluse dans une composante connexe rencontrant Ω de l'ensemble où

$$|F_1(Z)| + |F_2(Z)| + |J[F_1,F_2]\,(Z)| < \varepsilon\ e^{-Kp(Z)}$$

On utilise alors les hypothèses 2i et 2ii. ∎

Nous allons utiliser cette proposition pour démontrer le :

Théorème 1-2 : Soit a un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

Soient F_1 et $F_2^{(a)}$ les deux fonctions analytiques sur $\mathbb{C}^2$ définies par :

$$\forall Z \in \mathbb{C}^2,\ F_1(Z) = \cos(z).\cos(w) - 1.$$

$$\forall Z \in \mathbb{C}^2,\ F_2^{(a)}(Z) = \cos(a\,z).\cos(a\,w) - 1.$$

Le couple $(F_1, F_2^{(a)})$ est " Slowly decreasing" au sens de Berenstein-Taylor pour le poids $p(Z) = |\mathrm{Im}\ Z| + \mathrm{Log}(1 + \|Z\|)$.

Corollaire : Soit a un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

Les exponentielles polynomes solutions du système d'équations de convolution $f(.) = G_4(f,.,1) = G_4(f,.,a)$ forment une partie totale dans l'espace de toutes les solutions continues de ce système. On dispose de plus d'un processus sommatoire permettant de représenter toute solution de classe C^∞ sous forme d'une somme (convergente dans $C^\infty(\mathbb{R}^2)$) d'exponentielles polynomes solutions du système d'équations.

Le corollaire est une conséquence du théorème 1-2 et du théorème 7 de [2] (les mesures introduites sont symétriques par rapport à (0,0)).

Pour démontrer le théorème 1-2, nous allons avoir besoin de localiser l'ensemble des zéros communs aux deux variétés analytiques $F_1(Z) = 0$ et $F_2^{(a)}(Z) = 0$.

(1) Nous appelerons Γ le sous groupe de $\mathbb{R}^2$ engendré par les points (1,0), (0,1), (a,0), (0,a).

Soient μ et ν_a les mesures atomiques de $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$F_1 = \hat{\mu},\quad F_2^{(a)} = \hat{\nu}_a.$$

ν désignant une mesure atomique à support fini porté par Γ, χ étant un caractère du groupe Γ, on notera, si $\nu = \sum_{\gamma_i \in \Gamma} a_i \delta_{\gamma_i}$, $\chi.\nu = \sum_{\gamma_i \in \Gamma} a_i \chi(\gamma_i).\delta_{\gamma_i}$

Lemme 1-2-1 : Il existe des constantes strictement positives ε, K, T telles que, pour tout $Z \in \mathbb{C}^2$ tel que $|\mathrm{Im}\, Z| > T$, on ait :

$$\forall\, \chi \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{T}), |(\chi.\mu)\hat{}(Z)| + |(\chi.\nu_a)\hat{}(Z)| + |J((\chi.\mu)\hat{}, (\chi.\nu_a)\hat{})(Z)| > \varepsilon e^{-K|\mathrm{Im}Z|}$$

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan enclidien.
Pour tout vecteur $\vec{u} = \cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j}$, et pour tout $\alpha > 0$, désignons par $\mathcal{S}_\alpha(\vec{u})$ le secteur angulaire :

$$\mathcal{S}_\alpha(\vec{u}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x \sin\theta - y \cos\theta| < \alpha(x \cos\theta + y \sin\theta)\}$$

Nous allons en fait montrer que, pour toute direction $\vec{u}$, il existe deux constantes strictement positives $\alpha(\vec{u})$ et $\beta(\vec{u})$ telles que :

$$\forall\, Z \in \mathbb{C}^2,\ (\mathrm{Im}z,\ \mathrm{Im}w) \in \mathcal{S}_{\alpha(\vec{u})}(\vec{u}) \text{ et } \vec{u}.\begin{pmatrix} \mathrm{Im}z \\ \mathrm{Im}w \end{pmatrix} \geq \beta(\vec{u})$$

$$\Rightarrow \forall\, \chi \in \mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{T}), |(\chi.\mu)\hat{}(Z)| + |(\chi.\nu_a)\hat{}(Z)| + |J((\chi.\mu)\hat{}, (\chi.\nu_a)\hat{})(Z)| > \alpha(\vec{u})e^{-\beta(\vec{u})|\mathrm{Im}Z|}$$

Mais, si $\vec{u}$ est distinct des directions perpendiculaires aux côtés du carré $(\pm\vec{i}, \pm\vec{j})$, il existe deux constantes $\alpha(\vec{u})$ et $\beta(\vec{u})$ strictement positives telles que :

$$\forall\, Z \in \mathbb{C}^2,\ (\mathrm{Im}z,\ \mathrm{Im}w) \in \mathcal{S}_{\alpha(\vec{u})}(\vec{u}) \text{ et } \vec{u}.\begin{pmatrix} \mathrm{Im}z \\ \mathrm{Im}w \end{pmatrix} \geq \beta(\vec{u})$$

$$\Rightarrow \forall\, \chi \in \mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{T}),\ |(\chi.\mu)\hat{}(Z)| \geq 1$$

Nous allons donc supposer $\vec{u} = (1,0)$ à partir de maintenant.

Soit χ un élément de $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{T})$.

Posons : $\chi((1,0)) = e^{i\theta}$ $\quad \chi((0,1)) = e^{i\theta'}$

$\chi((a,0)) = e^{i\alpha}$ $\quad \chi((0,a)) = e^{i\alpha'}$.

Nous avons :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z}(\chi.\mu)\hat{}(Z) & \frac{\partial}{\partial w}(\chi.\mu)\hat{}(Z) \\ \frac{\partial}{\partial z}(\chi.\nu_a)\hat{}(Z) & \frac{\partial}{\partial w}(\chi.\nu_a)\hat{}(Z) \end{vmatrix} = a[\sin(z+\theta)\cos(w+\theta')\ \sin(aw+\varphi')\cos(az+\varphi) - \sin(w+\theta')\cos(z+\theta)\ \sin(az+\varphi)\cos(aw+\varphi')]$$

$$= a.\ F_\chi(Z).$$

D'autre part :

$$(2)\quad \sin((a-1)w+\varphi'-\theta')\sin((a+1)z+\theta+\varphi) = F_\chi(Z)+G_\chi(Z)+(\chi.\rho_1)\hat{}(Z).(\chi.\mu)\hat{}(Z) + (\chi.\rho_2)\hat{}(Z).(\chi.\nu_a)\hat{}(Z)$$

où : ρ_1 et ρ_2 sont deux mesures atomiques de support fini dans Γ,

où : $G_\chi(Z) = \sin(aw+\varphi').\sin(az+\varphi) - \sin(z+\theta).\sin(w+\theta')$.

Il résulte de (2) :il existe deux mesures atomiques à support fini dans Γ, σ_1 et τ, telles que :

(i) $\mathrm{Supp}(\sigma_1) \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < 1\}$.

(ii) $\forall\ Z \in \mathbb{C}^2$, $F_\chi(Z) = -\frac{1}{4}(\chi.\tau)\hat{}(Z) - (\chi.\mu)\hat{}(Z)(\chi.\rho_1)\hat{}(Z) - (\chi.\nu_a)\hat{}(Z)(\chi.\rho_2)\hat{}(Z)$.

(iii) $\tau = \delta_{(a+1,a-1)} - \delta_{(a+1,+1-a)} + \delta_{(1,1)} - \delta_{(1,-1)} + \sigma_1$.

En fait la mesure τ peut s'écrire sous la forme :

$$\tau = \delta_{(a+1,a-1)} + \delta_{(a+1,-1-a)} + \delta_{(1,1)} - \delta_{(1,-1)} + \sigma_2 + \mu * \rho_1',$$

où σ_2 et ρ_1' sont deux mesures atomiques à support fini dans Γ, avec

$\mathrm{Supp}\ \sigma_2 \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < 1\}$.

τ peut donc s'écrire sous la forme :

$$\tau = 4\,\delta_{(1,-1)} + \delta_{(1,1)} - \delta_{(1,-1)} + \delta_3 + \mu * \rho_1'' + \nu_a * \rho_2',$$

où σ_3, ρ_1'', ρ_2' sont des mesures atomiques à support fini dans Γ, avec

$\mathrm{Supp}\ \sigma_3 \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < 1\}$.

On peut écrire le Jacobien des deux transformées de Fourier des mesures $\chi.\mu$ et $\chi.\nu_a$ sous la forme: $J((\chi.\mu)\hat{},(\chi.\nu_a)\hat{})(Z) = -\frac{a}{4}(\chi\tau)\hat{}(Z) - a(\chi.(\rho_1*\mu+\rho_2*\nu_a)\hat{})$

avec $\tau = 2\,\delta_{(1,-1)} + \sigma_4 + \mu * \tau_{4,1} + \nu_a * \tau_{4,2}$

$= 2\,\delta_{(1,1)} + \sigma_5 + \mu * \tau_{5,1} + \nu_a * \tau_{5,2}$

où les mesures σ_4, σ_5, $\tau_{4,1}$, $\tau_{4,2}$, $\tau_{5,1}$, $\tau_{5,2}$ sont des mesures atomiques à support fini dans Γ, avec $\mathrm{Supp}(\sigma_4) \cup \mathrm{Supp}(\sigma_5) \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x < 1\}$.

L'existence de $\alpha(\vec{u})$ et de $\beta(\vec{u})$ est alors immédiate (le raisonnement est analogue à celui qui est fait dans la démonstration du lemme 2 de [23]). Un recouvrement de $\mathbb{R}^2$ par un nombre fini de secteurs angulaires ouverts du type $\mathcal{S}_\alpha(\vec{u})$ achève la preuve du lemme 1-2-1 ■

Lemme 1-2-2 : Soit a un réel de $]0,1[$, Γ le sous groupe de $\mathbb{R}^2$ correspondant (1). Pour tout caractère χ de Γ, les zéros communs de $(\chi.\mu)\hat{}(Z) = (\chi.\nu_a)\hat{}(Z)$ sont isolés.

Considérons en effet, comme dans [23], l'ensemble $\mathbb{E} = \bigcup_{\chi \in \mathrm{Hom}(\Gamma,\pi)} \mathcal{W}_a(\chi)$,

où $\mathcal{W}_a(\chi)$ désigne l'ensemble des zéros non isolés de $(\chi.\mu)\hat{}(Z) = (\chi.\nu_a)\hat{}(Z) = 0$.

En reprenant mot pour mot la preuve du lemme 4 de [23], on montre que la projection de $\mathbb{E}$ sur l'axe des z est une partie ouverte et fermée de $\mathbb{C}$. Comme cette projection se trouve, d'après le lemme 1-2-1, dans la bande $\{z \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Im} z| \leq T\}$, elle est vide. ■

Lemme 1-2-3 : Soit a un réel de $]0,1[$, Γ le sous groupe de $\mathbb{R}^2$ correspondant (1). L'ensemble $\mathfrak{F}$ des couples de fonctions entières sur $\mathbb{C}^2$ de la forme $[(\chi.\mu)\hat{}(Z), (\chi.\nu_a)\hat{}(Z)]$, où χ est un caractère de Γ, est compact pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}^2$.

Puisque $|\chi| = 1$ et que μ et ν_a ont un support compact, toutes les dérivées de $(\chi.\mu)\hat{}$ et de $(\chi.\nu_a)\hat{}$ sont majorées, uniformément par rapport à χ. Le théorème d'Ascoli montre que $\mathfrak{F}$ est relativement compact.

$\mathfrak{F}$ est en fait compact car le groupe $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{T})$ est métrisable et compact ■

Lemme 1-2-4 : Soit a un réel de $]0,1[$. Soit T un réel strictement positif; il existe deux constantes $\varepsilon(a)$, $K(a)$ telles que toute composante connexe de $\{Z \in \mathbb{C}^2, \ |\hat{\mu}(Z)| + |\hat{\nu}_a(Z)| < \varepsilon(a)\}$ soit bornée et ait un diamètre au plus égal à $K(a)$ lorsqu'elle intercepte la bande de $\mathbb{C}^2$ $\{Z \in \mathbb{C}^2, |\mathrm{Im}\ Z| \leq T\}$.

Considérons dans $\mathbb{C}^2$ la boule Δ de centre $(0,0)$ et de rayon 4 T. L'ensemble $\mathfrak{F}$ des couples de fonctions entières sur $\mathbb{C}^2$ et de la forme

$[\ (\chi.\mu)\hat{}\ (Z),\ (\chi.\nu_a)\hat{}\ (Z)\ ]$, où χ est un caractère de Γ, est compact pour la topologie de la convergence uniforme sur Δ.

Soit (F,G) un tel couple ; il existe un compact connexe $\mathcal{C}(F,G)$ contenant dans son intérieur la boule de centre $(0,0)$ et de rayon 2 T, inclus dans $\mathring{\Delta}$, et sur le bord duquel on ait $|F|+|G| > \varepsilon(F,G) > 0$. (cela résulte du lemme 1-2-2 ; on peut d'ailleurs prendre pour $\mathcal{C}(F,G)$ une boule de centre $(0,0)$ et de rayon intermédiaire entre 2 T et 4 T sur le bord de laquelle F et G n'aient aucun zéro commun).

Il existe un voisinage $\mathcal{V}(F,G)$ du couple (F,G) pour la topologie de la convergence uniforme sur Δ, tel que :

$$\forall\ (F',G') \in \mathcal{V}(F,G),\ |F'|+|G'| > \frac{\varepsilon(F,G)}{2} \quad \text{sur } \partial\, \mathcal{C}(F,G).$$

Utilisant alors le lemme 1-2-3, nous recouvrons $\mathfrak{F}$ par un nombre fini de voisinages $\mathcal{V}(F_1, G_1), \ldots \mathcal{V}(F_k, G_k)$.

Pour tout couple (x_o, u_o) dans $\mathbb{R}^2$, le couple de fonctions analytiques

$(\hat{\mu}(z+x_o, w+u_o),\ \hat{\nu}_a(z+x_o, w+u_o))$ est un élément de $\mathfrak{F}$.

On pose alors $\varepsilon(a) = \inf_{i \in \{1,\ldots k\}} \left(\frac{\varepsilon(F_i,G_i)}{2}\right)$, $K(a) = \sup_{i \in \{1,\ldots k\}} (\mathrm{diam}(\mathcal{C}(F_i,G_i)))$.

Le lemme 1-2-4 résulte d'un simple argument de compacité ■

Nous sommes en mesure de démontrer le théorème 1-2.
Nous appliquons la proposition 1-1 en prenant comme ouvert

$$\Omega = \{Z \in \mathbb{C}^2,\ |\mathrm{Im}\ Z| > T\}.$$

Grâce au lemme 1-2-1, les hypothèses 2i et 2ii sont trivialement vérifiées. Nous appliquons enfin le lemme 1-2-4 ■ ■

II Quelques considérations arithmétiques.

Dans toute cette partie, a désignera un irrationnel de l'intervalle $]0,1[$. Comme nous l'avons annoncé en introduction, l'obstruction pour que le système d'équations de convolution dans $\mathbb{R}^2$ du type $(*)$ admette un domaine fondamental (c'est à dire un domaine borné Δ de $\mathbb{R}^2$ tel que l'on puisse identifier l'espace des solutions L^2_{loc} du système $(*)$ et $L^2(\Delta)$) ([12], [23]), est que l'ensemble des couples $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ satisfaisant au système d'équations :

$$(E_a)\quad \cos z \cdot \cos w = \cos(az) \cdot \cos(aw) = 1$$

ne peut être inclus dans une bande de $\mathbb{C}^2$ de la forme $|\mathrm{Im}\ Z| \leq T$.

Proposition 2-1 Soit a un irrationnel de $]0,1[$.
Soit T la constante introduite dans l'énoncé du lemme 1-2-1.
Pour tout v réel et de module supérieur ou égal à T, pour tout ε positif, il existe un couple de $\mathbb{C}^2$, solution de :

(i) $\cos(z) \cdot \cos(w) = \cos(a \cdot z) \cdot \cos(a \cdot w) = 1.$
(ii) $|\mathrm{Im} w - v| < \varepsilon.$

Prouvons cette proposition.
Soient A et B deux nombres complexes : $A=\alpha+i\beta$, $B=\gamma+i\delta$, $\beta\delta \neq 0$, $|\mathrm{sh}(\beta)\mathrm{sh}(\delta)|<1$.
Nous allons montrer qu'il existe θ et φ dans $\mathbb{R}$, tels que $\cos(A+\theta)\cdot\cos(B+\varphi)=1$.
En effet :

$\cos(A+\theta)=\cos(\alpha+\theta)\cdot \mathrm{ch}(\beta) - i \sin(\alpha+\theta)\cdot \mathrm{sh}(\beta)$ (pour tout θ réel)

$\cos(B+\varphi)=\cos(\gamma+\varphi)\cdot \mathrm{ch}(\delta) - i \sin(\gamma+\varphi)\cdot \mathrm{sh}(\delta)$ (pour tout φ réel)

Pour tout ρ dans $[0, \frac{\Pi}{2}]$, posons :

$$\Psi(\rho)=(\mathrm{ch}(\beta)\cdot\cos(\lambda_1(\rho))-i\ \mathrm{sh}(\beta)\cdot \sin(\lambda_1(\rho)))(\mathrm{ch}(\delta)\cdot \cos(\lambda_2(\rho))+i\ \mathrm{sh}(\delta)\cdot\sin(\lambda_2(\rho)$$

où $\lambda_1(\rho)$ et $\lambda_2(\rho)$ sont déterminés de manière à ce que :

$$\mathrm{Arg}((\mathrm{ch}(\beta)\cdot \cos(\lambda_1(\rho)) - i\ \mathrm{sh}(\beta)\ \sin(\lambda_1(\rho))) = \rho.$$

$$\mathrm{Arg}(\mathrm{ch}(\delta).\cos(\lambda_2(\rho)) + i\,\mathrm{sh}(\delta).\sin(\lambda_2(\rho))) = -\rho.$$

$$\lambda_1(\rho) \in [0,2\pi[\ ,\ \lambda_2(\rho) \in [0,2\pi[.$$

Ψ est une fonction continue à valeurs réelles, telle que $\Psi(0) = \mathrm{ch}(\beta)\mathrm{sh}(\delta) > 1$

et que $|\Psi(\frac{\pi}{2})| = |\mathrm{sh}(\beta).\ \mathrm{sh}(\delta)| < 1$.

Il existe donc $\rho_\circ$ dans $]0, \frac{\pi}{2}[$, tel que $\Psi(\rho_\circ) = 1$.

On choisit enfin $\theta = \alpha - \lambda_1(\rho_\circ)$, $\varphi = -\gamma - \lambda_2(\rho_\circ)$.

On a bien alors $\cos(A+\theta).\ \cos(B+\varphi) = 1 = \Psi(\rho_\circ)$.

Soit maintenant v fixé dans $\mathbb{R}$, tel que $v \geq T$.

Considérons y dans $\mathbb{R}^+$, tel que $\mathrm{sh}(y).\ \mathrm{sh}(v) < 1$ et que $\mathrm{sh}(a.y).\mathrm{sh}(a.v) < 1$.

En raisonnant avec $A = i\,v$ et $B = i\,y$, on détermine u et x dans $\mathbb{R}$, tels que l'on ait : $\cos(u+iv)\cos(x+iy) = 1$.

En raisonnant ensuite avec $A' = a(u+iv)$, $B' = a(x+iy)$,

on détermine dans un deuxième temps θ et φ dans $\mathbb{R}$, de manière à ce que :

$$\cos(a(u+iv)+\varphi).\ \cos(a(x+iy)+\theta) = 1.$$

Le couple $(x+iy, u+iv)$ est donc une solution de $(\chi.\mu)\hat{}(Z) = (\chi.\nu_a)\hat{}(Z) = 0$

où $\chi(1,0) = \chi(0,1) = 1$, $\chi(a,0) = e^{i\theta}$, $\chi(0,a) = e^{i\varphi}$.

(Pour les notations, se référer aux remarques suivant l'énoncé du corollaire du théorème 1-2)

Ce zéro est un zéro isolé du système $(\chi.\mu)\hat{}(Z) = (\chi.\nu_a)\hat{}(Z) = 0$,

en vertu du lemme 1-2-1 ; c'est même un zéro simple.

Si ε est suffisamment petit pour que $(x+iy, u+iv)$ soit le seul zéro commun aux deux variétés $(\chi.\mu)\hat{}(Z) = (\chi.\nu_a)\hat{}(Z) = 0$ à l'intérieur de la boule de centre ce point et de rayon 2ε, alors :

$$\exists \eta(\varepsilon) > 0,\ \forall\ \chi' \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{T}),\ \|\chi' - \chi\|_{\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{T})} < \eta(\varepsilon)$$

$\Rightarrow (\chi'.\mu)\hat{}$ et $(\chi'.\nu_a)\hat{}$ ont aussi un zéro commun dans la boule de centre

$(x+iy, u+iv)$ et de rayon ε.

Cela résulte par exemple de l'application de la formule de Kronecker.

Or a est irrationnel ; $2\pi\mathbb{Z} + 2\pi a\mathbb{Z}$ est donc un sous groupe dense de $\mathbb{R}$ (d'après le théorème de Dirichlet).

Il existe donc (k,ℓ) dans $\mathbb{Z}^2$, tel que, si $\chi_{(k,\ell)}$ désigne l'élément de

$\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{T})$ défini par $\chi_{(k,\ell)}(0,1) = \chi_{(k,\ell)}(1,0) = 1, \chi_{(k,\ell)}(a,o) = e^{-2i\pi ka}$,

$\chi_{(k,\ell)}(o,a) = e^{-2i\pi\ell a}$, on ait $\|\chi-\chi_{(k,\ell)}\|_{\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{T})} < \eta(\varepsilon)$.

On a donc ainsi construit un point de $\mathbb{C}^2$, solution de $\hat{\mu}(Z)=\tilde{\nu}_a(Z)= 0$,

situé à une distance au plus égale à ε du point $(x+iy+2k\pi, u+iv+2\ell\pi)$.

Ce point vérifie $|\mathrm{Im}w-v|<\varepsilon$ ■

Un raffinement de cette démonstration nous permet de démontrer la :

Proposition 2-2 : Soit a un irrationnel de $]0,1[$.
Les deux énoncés suivants sont équivalents :

(i) $\exists\ C > 0,\ \forall (z,w) \in \mathbb{C}^2,\ \cos(z)\cos(w)= \cos(a.z)\cos(a.w) = 1$

$\Rightarrow |\mathrm{Im}z| < C(1+\mathrm{Log}\,(1+|\mathrm{Re}w|))$.

(ii) $\exists\ m \in \mathbb{N},\ m\geq 2$, tel que $\forall q \in \mathbb{Z}\setminus\{0,-1\}, d((2q+1)a, \mathbb{Z}\setminus 2\mathbb{Z}) \geq \dfrac{1}{|2q+1|^m}$.

Remarque : On rappelle qu'un nombre réel a est un nombre de Liouville ([10],[11]) s'il peut être rapidement approché par les rationnels au sens suivant :

$\forall m \geq 2,\ \exists\ p \in \mathbb{Z},\ \exists\ q \in \mathbb{Z}$, avec $q \geq 2$ et $\left| a - \dfrac{p}{q} \right| < \dfrac{1}{|q|^m}$.

Ces nombres constituent, dans $[0,1]$, un ensemble de mesure nulle.
Il est clair qu'un irrationnel de $]0,1[$, qui est non Liouville, vérifie (ii).

Preuve de (ii) $\Rightarrow$ (i) : Raisonnons par l'absurde.
Supposons que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on puisse trouver un couple (z_n, w_n) dans $\mathbb{C}^2$ tel que :

$$\begin{cases} \cos(z_n)\cos(w_n) = \cos(a\,z_n)\cos(a\,w_n) = 1 \\ |\mathrm{Im}\ z_n| \geq n\,(1+\mathrm{Log}(1+|\mathrm{Re}\ w_n|)) \end{cases}$$

Pour les grandes valeurs de n, on peut écrire :

$$w_n = (2q_n + 1).\frac{\pi}{2} + \varepsilon_n\ ,\ |\varepsilon_n| \leq 3.e^{-n},\ q_n \in \mathbb{Z}\setminus\{0,-1\}.$$

on a donc : $d((2q_n + 1)\,a.\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}.(\mathbb{Z}\setminus 2\mathbb{Z})) \leq \frac{6}{\pi}.\ e^{-an}\ \frac{1}{|2q_n + 1)^{an}|}$.

Pour n suffisamment grand : $\frac{6}{\pi}\ e^{-an}\ \frac{1}{(2q_n+1)^{an}} \leq \frac{\pi}{2}.\ \frac{1}{|2q_n+1|^{an}}$.

(pour $n \geq N$).

Si l'on se donne $m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$, et $n \geq \sup(N, \frac{m}{a})$,

$$\exists\ q_n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1,0\},\ d((2q_n+1).a, \mathbb{Z}\setminus 2\mathbb{Z}) \leq \frac{1}{|2q_n+1|^m}.$$

Ceci adhère la preuve de (ii) $\Rightarrow$ (i).

Preuve de (i) $\Rightarrow$ (ii) : La démonstration repose sur le lemme technique suivant, dont l'essentiel de la preuve figure déjà dans celle de la proposition 2-1.

Lemme 2-2-1 : Soit y un nombre strictement positif.
Soit $v \in \mathbb{R}^+$ vérifiant $\mathrm{sh}(y).\ \mathrm{sh}(v) < 1$.
Il existe alors un unique couple $(x(v), u(v))$ dans $]0, \frac{\pi}{2}[\times]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que : $\cos(x(v) + i\,y).\ \cos(-u(v) + i\,v) = 1$.
De plus on a : $\lim_{v\to o} (u(v)) = u_o(y)$ où $\mathrm{tg}(u_o(y)) = \mathrm{sh}y$.

Prouvons ce lemme :
Si λ varie dans $[0, \frac{\pi}{2}]$, posons $\Psi_v(\lambda) = |z_v(\lambda)|.|z_y(-\lambda)|$,

où $z_v(\lambda)$ désigne l'affixe du point d'argument (λ) de l'ellipse

$$\frac{x^2}{\mathrm{ch}^2(v)} + \frac{Y^2}{\mathrm{sh}^2(v)} = 1,$$

où $z_y(-\lambda)$ désigne l'affixe du point d'argument $(-\lambda)$ de l'ellipse

$$\frac{x^2}{\mathrm{ch}^2(y)} + \frac{Y^2}{\mathrm{sh}^2(y)} = 1.$$

Comme $\Psi_v(\frac{\pi}{2}) < 1 < \Psi_v(0)$, que Ψ_v est une fonction décroissante de λ, il

existe une unique valeur de λ pour laquelle $\Psi_v(\lambda) = 1$.

Cette valeur, que nous noterons $\lambda(v)$, vérifie :

$$\left(\frac{\cos^2(\lambda(v))}{ch^2(v)} + \frac{\sin^2(\lambda(v))}{sh^2(v)}\right).\left(\frac{\cos^2(\lambda(v))}{ch^2(y)} + \frac{\sin^2(\lambda(v))}{sh^2(y)}\right) = 1.$$

on a donc : $sh^2(v).ch^2(v).\ ch^2(y).\ sh^2(y) \geq \sin^4(\lambda(v))$.

On en déduit donc : $\lim\limits_{v \to o} (\lambda(v)) = 0.$

Comme dans la preuve de la proposition 2-1, $x(v)$ et $u(v)$ sont déterminés grâce à $\lambda(v)$, et l'on a :

$$\frac{\cos^2(\lambda(v))}{ch^2(v)}.\ (1+tg^2(u(v))).\left(\frac{\cos^2(\lambda(v))}{ch^2(y)} + \frac{\sin^2(\lambda(v))}{sh^2(y)}\right) = 1$$

Il s'ensuit : $\lim\limits_{v \to o} (1+tg^2(u(v))) = ch^2(y).$

On a donc : $\lim\limits_{v \to o} tg^2(u(v)) = sh^2(y).$

Ce qui achève la preuve du lemme 2-2-1.

Prouvons alors la proposition 2-2 :

En reprenant les notations de la preuve du lemme 2-2-1, considérons la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall y \in \mathbb{R}^+,\ \varphi(y) = a\ u_o(y) - u_o(ay)$$

Il s'agit d'une fonction décroissante de y (pour les valeurs suffisamment grandes de la variable). De plus, $\lim\limits_{y \to +\infty} (\varphi(y)) = (a-1).\frac{\pi}{2}$.

Nous allons démontrer (i) $\Rightarrow$ (ii) par l'absurde.

Si (ii) était en défaut, il existerait une suite d'entiers $(q_n)_{n\geq 2}$ de $\mathbb{Z}\setminus\{0,-1$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ d((2q_n + 1).a.\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ (\mathbb{Z} \setminus 2\ \mathbb{Z})) < \frac{\pi}{2|2q_n+1|^n}.$$

Il existerait donc une suite d'entiers $(\tilde{q}_n)_{n\geq 2}$ de $\mathbb{Z}^*$, et une suite d'entiers $(p_n)_{n\geq 2}$ de $\mathbb{Z}$, avec :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ 0 < (-a+1).\frac{\pi}{2} + \tilde{q}_n.\pi.a - p_n.\pi < \frac{\pi}{2(1+|\tilde{q}_n|)^n}.$$

Puisque $\lim_{y \to +\infty} \left[\text{Arctg}\left(\frac{1}{\text{sh}(ay)}\right) - a.\ \text{Arctg}\left(\frac{1}{\text{sh}(y)}\right) \right] = 0_+$, et que

la fonction $\tilde{\varphi}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\tilde{\varphi}(y) = \text{Arctg}\left(\frac{1}{\text{sh}(a.y)}\right) - a.\ \text{Arctg}\left(\frac{1}{\text{sh}(y)}\right)$

est décroissante pour les grandes valeurs de y, pour tout $n \geq 2$, il existe $y_n \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\tilde{\varphi}(y_n) = \varepsilon_n = (-a+1)\frac{\pi}{2} + q_n \pi\, a - p_n \pi$$

Fixons maintenant n et posons $y_n = y$.

Pour les valeurs de v vérifiant $\text{sh}(y).\ \text{sh}(v) < 1$ et $\text{sh}(ay)\ \text{sh}(av) < 1$, nous pouvons trouver, d'après la preuve de la proposition 2-1, quatre réels de l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$, $x_y(v)$, $u_y(v)$, $x_{a\,y}(v)$, $u_{a\,y}(v)$ de manière à ce que

(i y, iv) soit un zéro du système : $\begin{cases} \cos(z+x_y(v))\ \cos(-u_y(v)+w)=1. \\ \cos(az+x_{ay}(v))\ \cos(-u_{ay}(v)+w)=1. \end{cases}$

Grâce à l'argument de perturbation déjà utilisé pourvu que $|y| \geq T$ (cf lemme 1-2-1), il existe deux constantes $\varepsilon_\circ$ et $K_\circ$ strictement positives telles que :

si $|u_y(v) - u_\circ(y)| + |u_{ay}(av) - u_\circ(ay)| < \varepsilon_\circ\ e^{-K_\circ y}$, alors il existe, à une

distance au plus égale à $\frac{1}{2}$ du point (iy,iv), un couple(z',w')

solution du système d'équations : $\begin{cases} \cos(z'+x_y(v)).\cos(-u_\circ(y)+w')=1. \\ \cos(a.z'+x_{ay}(v)).\cos(-u_\circ(ay)+aw')=1. \end{cases}$

Nous avons donc : $\begin{cases} \cos(z'+x_y(v)).\cos(-u_\circ(y)+w')=1 \\ \cos(az'+x_{ay}(av)).\cos(-a\ u_\circ(y)+\varphi(y)+aw')=1. \end{cases}$

Or : $au_\circ(y)-u_\circ(ay) = (a-1).\frac{\pi}{2} + \tilde{\varphi}(y) = q_n \pi a - p_n \pi$

Nous avons donc : $\begin{cases} (-1)^{q_n}.\cos(z'+x_y(v)).\cos(-u_\circ(y)-q\pi+w')=1 \\ (-1)^{p_n}.\cos(az'+x_{ay}(av)).\cos(a[-u_\circ(y)-q\pi+w'])=1 \end{cases}$

Le même argument de perturbation nous assure l'existence d'un point (z";w"), solution de $\cos(z").\cos(w") = \cos(az").\cos(aw")=1$, tel que :

$$|\mathrm{Re}\ w'' + u_o(y) + q\pi| < 1 \quad , \quad |\mathrm{Im}\ z''-y\ | < 1.$$

Nous avons donc : $|\mathrm{Re}w''\ | < |q|.\ \pi + \frac{\pi}{2} + 1.$

$$|\mathrm{Im}z''\ | > |y| - 1$$

Mais nous avons d'autre part : $\tilde{\varphi}(y) \geq \rho\ e^{-ay}$ (pour une certaine constante positive ρ). A chaque $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$), suffisamment grand, nous avons donc pu associer un point $(z''_n\ ,\ w''_n)$ solution du système $\cos(z).\cos(w)=\cos(az).\cos(aw)$

vérifiant de plus :

$$(3)\quad \frac{\rho\ e^{-a|\mathrm{Im}z''_n|}}{e^{-a}} \leq \tilde{\varphi}(y_n) \leq \frac{\pi}{2(1+|q_n|)^n}, \text{ soit encore :}$$

$$(4)\quad e^{a|\mathrm{Im}z''_n\ |} \geq \frac{2\rho e^{-a}}{\pi}\ \left(\frac{1}{\pi}\right)^n\ \left(|\mathrm{Re}w''_n\ |+1\right)^n$$

Si nous avions (i), nous déduirons de (4) et de (i) qu'il existe une constante W telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ |\ \mathrm{Re}w''_n\ | \leq W.$

Mais l'on pourrait alors extraire de la suite (w''_n) une sous suite convergente, ce qui serait absurde puisque la limite w_o devrait vérifier $\cos(w_o) = \cos(aw_o) = 0$ ■

Proposition 2-3 : Il existe des irrationnels a de $]0,1[$, pour lesquels on peut construire une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers positifs strictement croissante, telle que : il existe deux constantes positives C_1 et C_2 de manière à ce que

$\forall\ k \in \mathbb{N}^*,\ \exists (z_k,\ w_k) \in \mathbb{C}^2$, vérifiant $\cos(z_k)\cos(w_k)=\cos(az_k)\cos(aw_k)=1,$

$$|\mathrm{Im}w_k| \leq 1,\ \mathrm{Im}z_k \geq n_k \mathrm{Log}\left(\frac{1+|\mathrm{Re}z_k|+|\mathrm{Re}w_k|}{C_1}\right) + C_2.$$

Considérons par exemple : $a = \sum_{p=o}^{+\infty} \frac{1}{3^{(p!)+1}}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$; posons $n_k = 4k$

Nous avons : $3^{(n_k)!+1}a = 3^{(n_k)!} + 3^{(n_k)!} + 1 + \sum_{p=2}^{n_k} 3^{(n_k)!-(p!)} + R_k.$

Il existe donc $p_{n_k} \in \mathbb{N}$, tel que $3^{(n_k)!} + 1 = 4p_{n_k} - 1 + R_k$.

Il existe aussi $q_{n_k} \in \mathbb{N}$, tel que $3^{(n_k)!} + 1 = 4q_{n_k} - 1$

Nous avons donc ainsi construit deux suites d'entiers $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$, $(q_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$,

telles que $0 < (4q_{n_k} - 1)\,a - (4p_{n_k} - 1) < \dfrac{C}{(q_{n_k}+1)^{n_k}}$, où C est une constante positive.

En reprenant la preuve de la proposition 2-2 et l'argument de perturbation utilisé, cela est suffisant pour assurer l'existence du couple (z_k, w_k) et des constantes C_1 et C_2 ∎

Nous allons enfin examiner le cas où a est un nombre irrationnel de type constant (voir par exemple [11], [13]).

Proposition 2-4 Soit $a \in]0,1[\setminus \mathbb{Q}$; on suppose a de type constant. Il existe alors deux constantes positives $T_1(a)$, $T_2(a)$, telles que : Pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$, il existe un couple (z,w) de $\mathbb{C}^2$ vérifiant :

(i) $\cos(z)\cos(w) = \cos(a\,z)\cdot\cos(a\,w) = 1$

(ii) $|\mathrm{Im}\ Z| \leq T_1(a)$

(iii) $(\mathrm{Re}z, \mathrm{Re}w) \in (x,y) + [-T_2(a), T_2(a)]^2$.

Soit a un irrationnel de $]0,1[$ de type constant.
Alors [13] :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ T_a(\varepsilon) > 0$, tel que: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \varphi \in \mathbb{R}$, il existe $q \in \mathbb{Z}$ vérifiant

$2\pi q \in [x - T_a(\varepsilon),\ x + T_a(\varepsilon)]$ et $d(2\pi q \cdot a - \varphi,\ 2\pi\mathbb{Z}) < \varepsilon$.

Soit alors T(a) la constante introduite dans l'énoncé du lemme 1-2-1.
Posons $T_1(a) = T(a) + 1$. Nous fixerons le couple (x,y).
Si v est un réel strictement positif vérifiant

$\mathrm{sh}(v)\,\mathrm{sh}(T(a)) < 1$ et $\mathrm{sh}(a\cdot v)\,\mathrm{sh}(aT(a)) < 1$,

on peut trouver quatre réels x_v, x'_v, u_v, u'_v dans $]0, \frac{\pi}{2}[$, tels que :

$$\begin{cases} \cos(x_v + i\,T(a)).\cos(-u_v + i\,v) = 1 \\ \cos(x'_v + a\,i\,T(a)).\cos(-u'_v + a\,i\,v) = 1 \end{cases}$$

on notera dorénavant $T(a) = T$.

De plus (voir la preuve de la proposition 2-2), $\lim_{v\to o}(x_v) = \lim_{v\to o}(x'_v) = 0$

$\lim_{v\to o}(u_v) = u_o$, $\lim_{v\to o}(u'_v) = u'_o$ où $tg(u_o) = sh(T)$, $tg(u'_o) = sh(a.T)$.

D'après l'argument de perturbation déjà utilisé, il existe (z_T, w_T) dans $\mathbb{C}^2$,

solution de $\cos(z_T)\cos(-u_o + w_T) = \cos(a.z_T).\cos(-u'_o + a.w_T) = 1$,

tel que $(\mathrm{Re}\ z_T, \mathrm{Re}\ w_T) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$ et que $|\mathrm{Im}\ Z_T| < T + \frac{1}{2}$.

D'après le même argument, du fait qu'il existe $q \in \mathbb{Z}$ vérifiant à la fois

$2\pi q \in [x - T_a(\varepsilon),\ x + T_a(\varepsilon)]$ et $d(2q\pi\, a - a\,u_o + u'_o,\ 2\pi\,\mathbb{Z}) < \varepsilon$, et $\ell \in \mathbb{Z}$

vérifiant à la fois $2\pi\,\ell \in [y - T_a(\varepsilon), y + T_a(\varepsilon)]$ et $d(2\ell\pi\, a,\ \mathbb{Z}) < \varepsilon$, on peut à

condition de choisir ε suffisamment petit (ce choix dépendra de la valeur de T), construire un couple (z'_T, w'_T) dans $\mathbb{C}^2$ tel que :

$$\begin{cases} \cos(z'_T + 2\,\ell\,\pi).\cos(w'_T - u_o + 2q\pi) = 1. \\ \cos(a(z'_T + 2\,\ell\,\pi)).\cos(a(w'_T - u_o + 2\,q\pi)) = 1. \\ (\mathrm{Re}\ z'_T,\ \mathrm{Re}\ w'_T) \in [-1,1]^2. \\ |\mathrm{Im}\ Z'_T| \le T + 1 = T_1(a). \end{cases}$$

ε ayant été choisi correctement en fonction de T, on pose $T_2(a) = T_a(\varepsilon) + 3$.

Le couple $(z'_T + 2\,\ell\,\pi,\ w'_T - u_o + 2\,q\,\pi)$ satisfait clairement les conditions (i), (ii), (iii) éxigées ■

Nous allons maintenant voir que si la condition (i) de la proposition 2-2 est vérifiée, nous pouvons contrôler par R^k le nombre de zéros isolés du système $\cos(z).\cos(w) = \cos(a\,z).\cos(a\,w) = 1$ dans la boule ouverte de centre (0,0) et de rayon R.

Revenons un instant au cas d'un n-uplet de fonctions entières

de type exponentiel dans $\mathbb{C}^n$ " Slowly decreasing " au sens de Berenstein-Taylor.

Proposition 2-4 Soient $(F_1, F_2, \ldots F_n)$ n fonctions entières de type exponentiel sur $\mathbb{C}^n$; on suppose que le jacobien de ce n-uplet de fonctions n'est pas identiquement nul. On suppose de plus :

(H1) Le n-uplet$(F_1, F_2, \ldots F_n)$ est "Slowly decreasing " au sens de Berenstein-Taylor pour le poids $p(Z)=|\text{Im } Z| + \text{Log}(1+\|Z\|)$.

(H2) Il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall Z \in \mathbb{C}^n,\ F_1(Z)=F_2(Z)=\ldots=F_n(Z)=0 \Rightarrow |\text{Im } Z| \leq C(1+\text{Log}(1+\|Z\|))$$

Désignons, pour tout R strictement positif, par N(R) le nombre de points Z solutions du système $(F_i(Z)=0,\ i \in \{1,\ldots n\})$ situés dans la boule ouverte de centre (0,0...0) et de rayon R.

Il existe alors deux constantes positives M et $\tilde{K}$ telles que :

$$\forall R \in \mathbb{R}^+,\ N(R) \leq \tilde{K}(1+R^M).$$

Donnons nous $\varepsilon > 0$, $K > 0$, de manière à ce que les composantes connexes de $\{ Z \in \mathbb{C}^n,\ (\sum_1^n |F_i(Z)|^2)^{1/2} < \varepsilon\, e^{-kp(Z)} \}$ soient bornées, et vérifient la condition (2) de l'hypothèse "Slowly decreasing".

Désignons par $\mathcal{C}_{(R)}$ l'ensemble des composantes connexes de cet ensemble rencontrant

$$\mathring{B}(0,R) \cap \{ Z \in \mathbb{C}^n,\ F_1(Z) = F_2(Z)=\ldots=F_n(Z)= 0\}.$$

Si K_1 et K_2 sont les deux constantes introduites dans la condition (2) de l'hypothèse "Slowly decreasing", et si $\tilde{C} \in \mathcal{C}_R$, nous avons :

$$\forall Z \in \tilde{C},\ p(Z) \leq K_1 + K_2\, p(Zo)\ ,\ \text{où } Zo \in S \cap \mathring{B}(0,R)$$

(On désignera par S l'ensemble des $Z \in \mathbb{C}^n$ tels que $F_1(Z)=F_2(Z)=\ldots=F_n(Z)=0$)

Nous avons donc :

$\forall\, Z \in \tilde{C},\ \mathrm{Log}(1+\|Z\|) \leq K_1 + K_2 \left[C + (C+1)\,\mathrm{Log}\,(1+R)\right]$

(à cause de l'hypothèse H1)

Il existe donc deux constantes λ et μ positives telles que :

$\forall\, R > 0,\ \forall\, \tilde{C} \in \mathcal{C}(R)\ ,\ \tilde{C} \subset B(0,\ \lambda(1+R^{\mu}))$.

Il existe également deux constantes strictement positives ρ_1 et ρ_2 telles que :

$\forall\, R > 0,\ \forall\, \tilde{C} \in \mathcal{C}_{(R)},\ \forall\, Z \in \partial\tilde{C},\ \left(\sum_{i=1}^{n} |F_i(Z)|^2\right)^{1/2} \geq \dfrac{\rho_1}{(1+R)^{\rho_2}}$

Grâce au lemme 1.5 de [2], nous pouvons supposer qu'il existe des constantes A et B telles que, si Γ désigne la frontière distinguée de l'une quelconque

des composantes connexes de $\{\, Z \in \mathbb{C}^n,\ \left(\sum_{1}^{n} |F_i(Z)|^2\right)^{1/2} < \varepsilon\ e^{-k\rho(Z)} \,\}$,

on ait $\int_{\Gamma} |dz_1 \wedge dz_2 \wedge \ldots \wedge dz_n| \leq A \exp(B\rho(Z))$.

En utilisant les formules de la section I de [2], nous voyons qu'il existe n + 1 réels strictement positifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \rho_3$ tels que :

$\forall\, \theta \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$, $\forall\, R > 0$, les fonctions analytiques G_i définies par

$G_i(Z) = F_i(Z) - \dfrac{\alpha_i}{(1+R)^{\rho_3}}\ e^{i\theta_i}$ $(i=1,2,\ldots n)$ ont, dans toutes les

composantes connexes $\tilde{C}$ appartenant à $\mathcal{C}_R$, le même nombre de zéros communs que les fonctions $F_i (i=1,2,\ldots n)$.

Posons alors : $\forall i \in \{1,\ldots n\}, \forall r > 0,\ M_i(r) = \sup_{Z \in B(0,r)} |F_i(Z)|$.

Soit γ un réel strictement supérieur à 1.

D'après le théorème 2-9 de Gruman [7], on a l'inégalité suivante :

$$(2\pi)^n\, N(R) \leq \left(\frac{1}{(\gamma^2-1)\,R'^2}\right)^n \mathrm{Vol}_n B(0,\gamma^n R') \cdot \prod_{j=1}^{j=n} \left[\mathrm{Log}^{+} M_j(\lambda\gamma^{n-1+j}(R^{\mu}+1)) + \mathrm{Log}^{-}\alpha_i + \rho_3 \mathrm{Log}(1+R')\right]$$

où $R' = \lambda(1+R^{\mu})$, C étant une constante indépendante de R.
On déduit immédiatement la proposition 2-4 ▪

Nous pourrions appliquer cette proposition au couple de fonctions

analytiques ($\cos(z).\cos(w) - 1$, $\cos(a\,z).\cos(a\,w) - 1$) lorsque a satisfait à la condition (ii).

Mais il existe dans ce cas particulier, grâce au lemme 1-2-1 un résultat plus précis :

Proposition 2-5 : Soit a un élément de $]0,1[$ (a peut éventuellement appartenir à Q)
Désignons par $N_a(R)$ le nombre de zéros du système d'équations $\cos(z).\cos(w) = \cos(a\,z).\cos(a\,w) = 1$ situés dans l'intérieur de la boule de centre (0,0) et de rayon R. On a

$$\int_1^R \frac{Na(r)}{r}\,dr = O(R^2).$$

Soit T(a) la constante associée à a par le lemme 1-2-1.
Grâce à ce lemme (qui nous dit qu'aux points où $|\mathrm{Im}\ Z| > T(a), \cos(z).\cos(w)=1$, $\cos(a\,z).\cos(a\,w) = 1$, on a $|J(\hat{\mu}, \hat{\nu}_a)| \geq \varepsilon\, e^{-k\|Z\|}$) et au théorème 3 de M. Okada [14], nous pouvons affirmer :

$$\exists\ C_1 > 0 \text{ telle que: } \forall\ R > 0,\ \int_1^R N_1^{(a)}(r)\,\frac{dr}{r} < C_1\,R^2,$$

où $N_1^{(a)}(R) = \mathrm{card}\{Z \in \mathbb{C}^2,\ \cos(z).\cos(w)=\cos(a\,z).\cos(a\,w)=1,\ |\mathrm{Im}\ Z| > T(a), \|Z\|<R\}$

Posons $N_2^{(a)}(R) = \mathrm{card}\{Z \in \mathbb{C}^2,\ \cos(z).\cos(w)=\cos(a\,z).\cos(a\,w)=1, |\mathrm{Im}\ Z| \leq T(a), \|Z\|<R\}$

Grâce au lemme 1-2-3 et au raisonnement effectué lors de la preuve du lemme 1-2-4, nous montrons :

$$\exists\ C_2 > 0,\ \forall\ R > 0,\ N_2^{(a)}(R) < C_2\,R^2.$$

or : $\displaystyle\int_1^R \frac{Na(r)}{r}\,dr = \int_1^R \frac{N_1^{(a)}(r)}{r}\,dr + \int_1^R \frac{N_2^{(a)}(r)}{r}\,dr$ ∎

III Le problème de la propagation des singularités.

Soient $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ n distributions à support compact dans $\mathbb{R}^n$.

Nous nous posons le problème de déterminer des conditions suffisantes portant la position des points de $\mathbb{C}^n$ vérifiant $\hat{\mu}_i(Z)=0$ $(i=1,\ldots n)$

de manière à ce qu'il existe dans $\mathbb{R}^n$ un ouvert relativement compact Ω dans lequel toute distribution à support compact dans $\mathbb{R}^n$ admette, modulo l'idéal $\sum_{i=1}^{n} \mu_i * \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, un représentant de support inclus dans Ω.

Il existera dans ce cas un ouvert relativement compact de $\mathbb{R}^n$ (par exemple du type $(]-A,A[)^n$) tel que toute solution distribution du système :

$\forall\, i \in \{1,\ldots n\}$, $\mu_i * \rho = 0$ soit C^∞ partout lorsqu'elle l'est sur cet ouvert, nulle partout lorsqu'elle l'est sur cet ouvert.

Deux exemples de ce type de situation dans $\mathbb{R}^2$ sont :

1 l'exemple de Delsarte généralisé, où les deux mesures μ_1 et μ_2 sont en quelque sorte "gouvernées" par les charges dont elles affectent les sommets d'un polygone convexe compact du plan affine ; si P désigne ce polygone, nous pouvons démontrer (et nous donnerons les grandes lignes de cette démonstration en prouvant le théorème 3-1) que tout ouvert Ω contenant P + P répond au problème posé ([22], [23]).

2 l'exemple des systèmes de la forme (*) $f(.)= G_4(f, ., 1)= G_4(f, .,a)$, où a vérifie la condition (ii) de la proposition 2-2 qui nous assure que l'ensemble des couples de $\mathbb{C}^2$ solutions de $\hat{\mu}(Z)= \hat{\nu}_a(Z)=0$, sans être, comme dans le cas de l'exemple 1, dans une bande de $\mathbb{C}^2\{|\mathrm{Im}\ Z| \leq T\}$ (voir la proposition 2-1), n'en est pas moins dans un domaine $|\mathrm{Im}\ Z| \leq T(1+\mathrm{Log}(1+\|Z\|)$

Théorème 3-1 [22] Soit α un nombre réel strictement supérieur à 1. Soient $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ $(n \in \mathbb{N})$, n distributions à support compact dans $\mathbb{R}^n$, de support inclus dans $[-1,+1]^n$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ tels que :

(H) $\forall\, Z \in \mathbb{C}^2$, $\sum_{i=1}^{n} |\hat{\mu}_i(Z)| < \varepsilon\, e^{-C_1|\mathrm{Im}\ Z|} \Rightarrow |\mathrm{Im}\ Z| \leq C_2(1+\mathrm{Log}(1+\|Z\|))$.

Alors, pour toute distribution U dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, il existe une distribution $\tilde{U}_\alpha$ dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, telle que : $\mathrm{Supp}(\tilde{U}_\alpha) \subset [-1-\alpha, 1+\alpha]^n$, $U - \tilde{U}_\alpha \in \sum_{i=1}^{n} \mu_i * \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$

Prouvons ce théorème en suivant les pas de la démonstration du théorème 2-2 de [2]. Nous allons tronquer la fonction analytique $\hat{U}$ au

voisinage de l'ensemble des points où les $\hat{\mu}_i$ sont simultanément très petits.

Nous poserons : $|F(Z)|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\hat{\mu}_i(Z)|^2$, $p(Z) = |\mathrm{Im}\ Z| + \mathrm{Log}(1 + \|Z\|)$.

Soit :

$\forall\ \eta > 0,\ \forall\ C > 0,\ V(\eta, C) = \{\ Z \in \mathbb{C}^n,\ |F(Z)| < \eta\ e^{-Cp(Z)}\ \}$.

En choisissant correctement $\eta' < \eta < \varepsilon, C' > C > C_1$, nous construisons une fonction $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n)$, égale à 1 sur $V(\eta', C')$, nulle au voisinage du complémentaire de $V(\eta, C)$, prenant ses valeurs dans $[0,1]$, et ayant un $\bar{\partial}$ vérifiant :

$$\exists\ A > 0,\ \exists\ B > 0,\ \forall\ Z \in \mathbb{C}^n,\ |\ \bar{\partial}\ \chi(Z)| \leq A\ e^{B.p(Z)}.$$

Suivant la méthode du complexe de Koszul ([2],[18]), et en reprenant la démonstration du théorème 2-2 [2], posons $m = 2n + 1 + (n-1)\ \alpha$.

Nous pouvons trouver une constante B_m de manière à ce que :

$$\int_{\mathbb{C}^n} \frac{|\hat{U}.\bar{\partial}\chi(Z)|}{|F(Z)|^{2m}} \exp\ (-B_m.p(Z))\ dv < +\infty.$$

Il existe donc (théorème 2-6 de [18]) n (0,1) formes $(\omega_i)_{i=1}^{i=n}$, $\exists\ B'_m > 0$,

telles que : $\forall i \in \{1,\ldots n\}$, $\bar{\partial}.\ \omega_i = 0$ et $\int_{\mathbb{C}^n} \frac{\|\omega_i(Z)\|^2}{|F(Z)|^{2(n-1)\alpha}}.\ e^{-B'_m.p(Z)}\ dv < +\infty$

avec de plus : $\hat{U}\ \bar{\partial}\chi = \sum_{i=1}^{n} \omega_i\ \hat{\mu}_i$.

En utilisant le théorème de Hörmander et l'hypothèse (H), nous construisons $q \in \mathbb{N}$, $V_1, V_2, \ldots V_n$ dans $L^2_{loc}(\mathbb{C}^n)$ de manière à ce que :

$$\bar{\partial}\ (\chi\ \hat{U} - \sum_{i=1}^{n} V_i, \hat{\mu}_i) = 0 \text{ et } \int_{\mathbb{C}^n} \frac{\sum_{i=1}^{n} |V_i(Z)|^2}{|F(Z)|^{2(n-1)\alpha}} \cdot \frac{dV}{(1+\|Z\|)^q} < +\infty$$

Nous définissons ainsi une fonction entière Ψ, deux entiers q_1 et q_2, tels que :

$$\int_{\mathbb{C}^n} |\ \Psi(Z)|^2\ \frac{e^{-2(\alpha+1).|\mathrm{Im}\ Z|}}{(1+\|Z\|)^{q_1}}\ dV < \infty \quad \int_{\mathbb{C}^n} \frac{|\hat{U}(Z) - \Psi(Z)|}{|F(Z)|^{2(n-1)\alpha+2}} . e^{-q_2 p(Z)}\ .dV < +\infty$$

Nous appliquons enfin le théorème 1 de [17] ■

Corollaire : Soit a un irrationnel de]0,1[, vérifiant la condition (ii) de la proposition 2-2.

Toute solution au sens des distributions du système $f(.)= G_4(f,.,1)=G_4(f,\circ,a$ C^∞(resp nulle) dans un ouvert Ω contenant un translaté de $[-2,2]^2$ est en fait une solution C^∞ (resp nulle) du système.

Remarque : Une question que nous n'avons pu résoudre serait de savoir si la conclusion du corollaire subsiste lorsque a ne vérifie plus les contraintes arithmétiques imposées.

Il n'est cependant pas possible, pour un nombre satisfaisant aux hypothèses de la proposition 2-3 (et nous savons qu'il en existe), qu'il existe un ouvert Ω relativement compact, tel que toute distribution $U \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ se trouve congrue, modulo l'idéal $\mu_* \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2) + \nu_a * \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ a une distribution dont le support se trouve inclus dans Ω.

Si cela était le cas, prenons par exemple $(x_\circ,0) \in \mathbb{R}^2$, $x_\circ > 0$.

Nous aurions : $\delta(x_\circ,o) = \rho_{(x_\circ)} + \mu * \tau_{1,x_\circ} + \nu_a * \tau_{2,x_\circ}$.

avec de plus Supp $\rho \subset\subset \Omega$.

Considérons la suite $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de la proposition 2-2.

Nous aurions $e^{-ix_\circ z_k} = \hat{\rho}_{(x_\circ)}(z_k,w_k)$

Il existerait deux constantes $C_{(x_\circ)}$ et $K_{(x_\circ)}$ telles que:

$$(5) \quad e^{(x_\circ - C_{(x_\circ)}).\mathrm{Im} z_k} \leq K_{(x_\circ)}.(1+|\mathrm{Re}\ z_k|+|\mathrm{Re} w_k|)^{K_{(x_\circ)}}$$

Si $x_\circ$ est choisi suffisamment grand, on peut supposer $x_\circ - C_{(x_\circ)} > 0$.

La suite (Z_k) vérifierait à la fois (5) et la propriété de la proposition 2-3, ce qui signifierait que la suite w_k admette une sous suite convergente

ce qui est impossible (la limite éventuelle devrait vérifier $\cos(\ell) = \cos(a\,\ell) = 0$).

Lorsque a vérifie la condition (ii) de la proposition 2-2, il existe un ouvert relativement compact Ω_a (par exemple $]-2-\varepsilon, 2+\varepsilon[^2$) que l'on pourrait qualifier "d'unicité" pour le système d'équations (*).

Il n'est jamais possible pour de tels systèmes ($a \in]0,1[\setminus \mathbb{Q}$) que tout élément de $L^2(\Omega_a)$ admette, de manière continue, un prolongement à l'espace des solutions du système (*) dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$; cela en effet résulte du lemme 2-1.

En revanche, lorsque a est un irrationnel de $]0,1[$ de type constant, nous pouvons démontrer :

Proposition 3-2 [22] : Soit a un irrationnel de $]0,1[$, de type constant. Il existe $\varepsilon_0(a) > 0$ tel que : $\forall\, f \in L^2([-\varepsilon_0(a), \varepsilon_0(a)]^2)$, il existe

$F \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$, avec $F\,|\,[-\varepsilon_0(a), \varepsilon_0(a)]^2 = f$ et $f(.) = G_4(f,.,1) = G_4(f,.,a)$.

Nous allons utiliser un lemme de perturbation très classique [16].

Lemme 3-2-1 : Soit a un irrationnel de $]0,1[$, de type constant. Il existe une suite de points $(Zn)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}^2$, solutions de

$\cos(z_n).\cos(w_n) = \cos(a\,z_n).\cos(a\,w_n) = 1$,

il existe trois constantes strictement positives C, α, β telles que :

$\forall\, f \in L^2([-\frac{\pi}{C}, \frac{\pi}{C}]^2)$, $\exists\, (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$, avec :

(i) $f(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n\, e^{i(z_n x + w_n y)}$ (au sens L^2).

(ii) $\alpha \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2\right)^{1/2} \le \|f\|_{L^2([-\frac{\pi}{C},\frac{\pi}{C}]^2)} \le \beta \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2\right)^{1/2}$.

Nous utilisons pour prouver ce lemme un théorème classique de Paley-Wiener, redémontré par Nagy ([16], p206).

Appelons T_1 et T_2 les constantes liées à a par la proposition 2-4.

Choisissons C de manière à ce que $|e^{\frac{2\pi}{C}(T_1+T_2)} - 1| = |\theta| < 1$.

Considérons la base orthonormée de $L^2([-\frac{\pi}{C},\frac{\pi}{C}]^2)$ constituée des $e_{k,\ell}$ $(k\in\mathbb{Z}, \ell\in\mathbb{Z})$

où $e_{k,\ell}(x,y)=\exp(i(kCx+\ell Cy))$.

D'après la proposition 2-4, il existe $(z_{k,\ell}, w_{k,\ell}) \in \mathbb{C}^2$ tels que :

$\cos(z_{k,\ell})\cos(w_{k,\ell}) = \cos(az_{k,\ell})\cos(a\, w_{k,\ell}) = 1$, $z_{k,\ell} = kC + \rho_{k,\ell}$,

$w_{k,\ell} = \ell C + \sigma_{k,\ell}$, avec de plus $\sup(|\rho_{k\ell}|, |\sigma_{k,\ell}|) \le T_1 + T_2$

Soit F une partie finie de $\mathbb{Z}^2$, $(a_{k,\ell})_{(k,\ell)\in F}$ une famille de nombres complexes.

$$\sum_{(k,\ell)\in F} a_{k,\ell}\left(e^{i(z_{k,\ell}\, x + w_{k,\ell} y)} - e^{i(kCx+\ell Cy)}\right)$$

$$= \sum_{\substack{p+q\neq 0\\ p\ge 0, q\ge 0}} \frac{i^{p+q}}{p!\cdot q!} x^p \cdot y^q \cdot \left(\sum_{(k,\ell)\in F} \rho_{k,\ell}^{\,p}\ \sigma_{k,\ell}^{\,q}\ a_{k\ell}\ e^{i(kCx+\ell Cy)}\right).$$

La norme $L^2([-\frac{\pi}{C}, \frac{\pi}{C}]^2)$ de cette quantité est donc majorée par :

$$\sum_{\substack{p\ge o, q\ge o\\ p+q\neq o}} \frac{1}{p!}\cdot\frac{1}{q!}\left[\frac{\pi}{C}(T_1+T_2)\right]^{p+q} \cdot \left[\sum_{(k,\ell)\in F} |a_{k\ell}|^2\right]^{1/2}$$

cette expression est en fait égale à :

$$(e^{\frac{2\pi}{C}(T_1+T_2)} - 1)\cdot\left[\sum_{(k,\ell)\in F} |a_{k,\ell}|^2\right]^{1/2} = \theta\left[\sum_{(k,\ell)\in F} |a_{k,\ell}|^2\right]^{1/2}, \text{ où } \theta < 1.$$

Nous appliquons alors le théorème de Nagy ([16],p206) ■

La proposition 3-2 est une conséquence immédiate du lemme précédent.

On pose $\varepsilon_0(a)=\frac{\pi}{C}$ (C étant la constante introduite dans le lemme).

Tout élément f de $L^2([-\varepsilon_0, \varepsilon_0]^2)$ s'écrit : $f=\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2} c_{k,\ell}\ e^{i(z_{k,\ell}x+w_{k,\ell}\cdot y)}$

Comme : $\forall(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$, $|\text{Im } Z_{k,\ell}| \leq T_1$, on définit de cette manière un élément de $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ solution du système d'équations de convolution (*) ■

Lorsque a n'est pas un nombre de Liouville, nous avons un énoncé similaire à celui du corollaire du théorème 3-1 pour le système de la forme :

$$(**)\quad f(.) = H_4(f,.,1) = H_4(f,.,a).$$

Proposition 3-3 : Soit a un irrationnel de]0,1[, non-Liouville [10].
Il existe un ouvert relativement compact $\Omega =]-A,+A[^2$ tel que :
$\forall U \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$, il existe une distribution à support compact $\tilde{U}$, de support inclus dans Ω, telle que $U - \tilde{U} \in \tilde{\mu} * \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2) + \tilde{\nu}_a * \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$,
où $4.\tilde{\mu} = -4.\delta_{(0,0)} + \chi_{[-1,1]^2}$, $4.\tilde{\nu}_a = -4a^2.\delta_{(0,0)} + \chi_{[-a,a]^2}$
($\chi_{[-\alpha,\alpha]^2}$ désigne la mesure de densité uniforme 1 dans le carré $[-\alpha,+\alpha]^2$)

Cette proposition résulte du lemme suivant :

Lemme 3-3-1 : Soit a un irrationnel de]0,1[, non-Liouville.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C(\varepsilon;a)$ telle que :

$$\forall Z \in \mathbb{C}^2,\ |\hat{\tilde{\mu}}(Z)| + |\hat{\tilde{\nu}}_a(Z)| \leq \varepsilon$$
$$\Rightarrow |\text{Im } z| \leq C.(1+\text{Log}(1+\|Z\|) + |\text{Im } w|) \text{ et}$$
$$|\text{Im } w| \leq C.(1+\text{Log}(1+\|Z\|) + |\text{Im } z|.$$

Ce lemme résulte de [10] et de [15].

Il existe, si a est non-Liouville, deux distributions S_a et T_a de support respectivement inclus dans $[0,2]$ et $[0,2a]$, telles que :

$$\delta'_{(0)} = (\delta_{(0)} - \delta_{(2.a)}) * S_a + (\delta(0) - \delta(2)) * T_a \cdot$$

Nous en déduisons l'existence de deux distributions de $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, à support dans $]-\infty, 0[$, V_1 et V_2 telles que :

(6) $\forall\ Z \in \mathbb{C}^2$, $\sin(z).\ \sin(a\ z) = z(\hat{\tilde{\mu}}(Z)+1)\sin(az)V_1(w) + az\sin(z)(\hat{\tilde{\nu}}_a(Z)+1).V_2(w)$

Le lemme découle de ce résultat ■

Donnons les grandes lignes de la preuve de la proposition.

Nous fixons $\varepsilon = 1$, $C(\varepsilon,1) = C(\text{lemme3-3-1})$.

Nous déterminons, dans l'ouvert pseudo convexe

$$\Theta = \{Z \in \mathbb{C}^2, \operatorname{Im} w > C(1+\operatorname{Log}(1+\|Z\|)+|\operatorname{Im} z|)\}$$

deux fonctions analytiques P et Q telles que :

(i) $1 = P.\ \tilde{\tilde{\mu}} + Q.\tilde{\tilde{\nu}}_a$ dans Θ

(ii) $\exists\ N_\circ \in \mathbb{N}$, $\exists\ B \in \mathbb{R}^+$, $\int_{\Theta} \frac{|P|^2 + |Q|^2}{(1+\|Z\|)^{N_\circ}}\ e^{-2B.|\operatorname{Im} Z|}\ dv < +\infty$

Nous construisons ensuite une fonction φ de classe C^∞, égale à 1 sur le complémentaire de l'ouvert Θ, dont le support est inclus dans

$$\{Z \in \mathbb{C}^2,\ \operatorname{Im} w < C\ (4+\operatorname{Log}(1+\|Z\|)+|\operatorname{Im} z|)\},$$

et dont le $\tilde{\partial}$ est borné.

Choisissons enfin deux constantes positives K_1 et K_2 pour l'instant suffisamment grandes ; soit η un nombre strictement positif.

Posons, pour tout $t \geq 0$, $\omega'_t =]-K_1-\eta, K_1+\eta[\,x\,]-K_1-\eta, K_1+\eta+t[$.

On posera : $\forall\ t \geq 0,\ \omega_t = \omega'_t + K_2 . [-1,+1]^2$.

Nous allons raisonner comme S. Hänsen dans [9].

E désignera l'ensemble des réels positifs t tels que :

$\forall\ T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$, Supp $T \subset\subset \omega_t \Rightarrow \exists\ \tilde{T} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$, Supp $\tilde{T} \subset\subset \omega_\circ$ et

$T - \tilde{T} \in \tilde{\mu} * \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2) + \tilde{\nu}_a * \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$.

Nous désignerons par τ le sup de l'ensemble E.

Soit $X_\circ = (x_\circ, y_\circ)$ un point de $\partial\ \omega_\tau$, avec $-K_1 \leq x_\circ \leq K_1$, $y_\circ = K_1 + K_2 + \eta + \tau$.

Soit $\Omega_\circ$ le compact : $y = y_\circ - K_1$, $|x - x_\circ| \leq 4\ C\ K_1$.

Si K_2 est correctement choisi, $\Omega_\circ + (B+1).[-1,1]^2 \subset\subset \omega_\tau$.

(On a préalablement choisi $K_1 > B + 1$).

On pose $\Omega_1 = \Omega_\circ + (B+1).[-1,+1]^2$; comme $\Omega_1 \subset\subset \omega_\tau$, il existe un convexe compact Ω'_1 de ω'_τ tel que $\Omega_1 \subset \Omega'_1 + K_2 . [-1,+1]^2$.

En ayant recours, comme dans [9], à des secteurs paraboliques contenant $X_\circ$, on montre que toute distribution à support dans un tel secteur, ayant donc une transformée de Fourier $\hat{u}$ vérifiant :

$$\forall\ Z \in \mathrm{Supp}\varphi,\ |\hat{u}(Z)| \leq \lambda . (1+\|Z\|)^{\lambda} .\ \exp(H_{\Omega_\circ}(\mathrm{Im}\ Z))$$

(où $H_{\Omega_\circ}(x) = \sup_{y \in \Omega_\circ} \langle x, y \rangle$), est congrue, modulo l'idéal $\tilde{\mu} * \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2) + \tilde{\nu}_a * \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$, à une distribution de support inclus dans ω_τ.

Pourvu que M soit choisi suffisamment grand ($2(M+1-\lambda) > N_\circ$), nous pouvons trouver u_1 et u_2 dans $L^2_{loc} \subset \mathbb{C}^2)$ telles que :

$$\bar{\partial}\, u_1 = P.\ \hat{u}.\ \bar{\partial}\varphi,\quad \bar{\partial}\, u_2 = Q.\tilde{u}.\ \bar{\partial}\varphi.$$

$\forall i = 1,2$, $u_i\ \exp(-H_{\Omega_1}(\mathrm{Im}.) - (K_2-1)H_{[-1,1]}(\mathrm{Im}.) - M.\mathrm{Log}(1+\|.\|)) \in L^2(\mathbb{C}^2)$.
(on applique le théorème de Hörmander).

Nous pouvons par cette méthode ramener toute distribution à support compact dans $\theta_\tau = \omega_\tau \cup]-K_1, K_1[\times]K_1+K_2+\eta+\tau, 2K_1+K_2+\eta+\tau[$,

modulo l'idéal engendré par $\hat{\mu}$ et $\tilde{\nu}_a$, à une distribution de support inclus dans ω_τ.

Or l'idendité (6) permet de ramener toute distribution à support dans $\omega_\tau + K_1$, modulo ce même idéal, à une distribution de support inclus dans θ_τ.

Ceci contredirait la définition de τ si τ était fini.

Il faut enfin répéter ce raisonnement dans les 3 autres directions et appliquer à nouveau l'idendité (6) pour conclure ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] E.F Beckenbach et M. Reade : "Mean Values and Harmonic polynomials" Trans. Amer. Math. Soc. 53 (1943) p. 230 - 238.

[2] C.A Berenstein et B.A. Taylor : "Interpolation problems in $\mathbb{C}^n$ with applications to Harmonic Analysis". A paraitre J. Analyse. Math.

[3] J. Delsarte : "Note sur une propriété nouvelle des fonctions harmoniques" C.R.A.S. 246 (1958) p. 1358 - 1359.

[4] J. Delsarte : "Théorie des fonctions moyenne-périodiques de deux variables" Ann. Math. 72 (1960), 121 - 178.

[5] L. Ehrenpreis : "Fourier Analysis in several complex variables". Tracts in Math. 17. Wiley-Intersc. (1970).

[6] A. Friedman : "Meanvalues and polyharmonic polynomials" Michigan Math. Journal 4 (1957), 67 - 74.

[7] L. Gruman : "The area of analytic varieties in $\mathbb{C}^N$ " Math. Scand. 41 (1977)

[8] D.I Gurevich : "Counterexamples to aproblem of L. Schwartz" Funct. Analysis and its applications (traduit du russe). Russian original, Vol 9, n° 2,1975, traduction anglaise, 93-182,1975, p. 116-120.

[9] S. Hänsen : "Uniqueness of the Cauchy problem for convolution operators" Preprint.

[10] E. Kregelius - Petersen et G.H. Meirsters : "Non Liouville Numbers and a theorem of Hörmander" Journal of Functional Analysis 29 (1978), p. 142 - 150.

[11] S. Lang : "Introduction to Diophantine Approximations", Addison - Wesley Publ. Co., 1966.

[12] Y. Meyer : "Remarques sur un théorème de J. Delsarte", Ann. Inst. Fourier, 26 (1976), p. 133-152.

[13] Y. Meyer : "Algebraic Numbers and Harmonic Analysis" North-Holland Publ. Co. 1972.

[14] M. Okada : "Une estimation modifiée du type de Bezout pour les applications holomorphes équidimensionnelles entières de $\mathbb{C}^n$" C.R. Acad. Sc. Paris, t291, Série A (7 juillet 1980).

[15] R.D Richtmyer : "On the structure of some distributions discovered by Meirsters" Journal of functional Analysis 9 (1972), p.336 - 348.

[16] F. Riesz et B. Sz. Nagy, Leçons d'Analyse fonctionnelle, 6e édition, Gauthier-Villars, Paris 1972.

[17] H. Skoda : "Application des techniques L^2 à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids". Ann. scient. ec. Norm. sup., 4e série, 5, n°4(1972), p545-579.

[18] B.A. Taylor et J.J. Kelleher, Math.Ann. , 193, 1971, p. 225 - 237.

[19] J.L. Walsh :"A mean Value theorem for polynomials and Harmonic polynomials" Bull. Amer. Math. Soc. 42 (1936), p. 923-930.

[20] A. Yger, Comptes Rendus Acad. Sc Paris, 288, série A, 1979, p. 497.

[21] A. Yger, Comptes rendus Acad. Sc. Paris, 288, série A, 1979, p.535.

[22] A. Yger, Comptes rendus Acad. Sc Paris, 289,. série A, p. 169.

[23] A. Yger : "Fonctions moyenne périodiques de deux variables; étude des systèmes d'équations de convolution envisagés par J. Delsarte". Séminaire d'Analyse Harmonique-Orsay-1976-77.

C H A P I T R E IV

SUR LES COUPLES DE DISTRIBUTIONS A SUPPORT FINI DANS $\mathbb{R}^2$ ET A SPECTRE DISCRET

Dans un récent article [2], Berenstein et Taylor ont introduit, pour les n-uplets de fonctions analytiques sur $\mathbb{C}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, la notion de "slowly decreasing" relativement à un certain poids p. Notre point de vue restant celui de la synthèse spectrale, le poids p auquel nous ferons constamment référence sera le poids défini sur $\mathbb{C}^n$ par $p_o(z_1, z_2, \dots z_n) = \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{Im}\ z_i| + \mathrm{Log}(1+\|Z\|)$, où $\|Z\| = (\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2)^{1/2}$. Nous appellerons $A_p(\mathbb{C}^n)$ l'espace des fonctions F analytiques sur $\mathbb{C}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles qu'il existe des constantes A,B, dépendant de la fonction, permettant d'assurer

$$\forall\ Z \in \mathbb{C}^n\ ,\ |F(Z)| \leq A \exp(B\ p(Z)).$$

D'après [2], un n-uplet $(F_1,F_2,\dots F_n)$ de $(A_p(\mathbb{C}^n))^n$ est "slowly decreasing" s'il existe deux réels positifs ε, C tels que :

(a) les composantes connexes de l'ensemble où $\sum_{i=1}^{n} |F_i(Z)| < \varepsilon e^{-Cp(Z)}$ sont bornées ;

(b) si $\mathcal{C}$ est l'une de ces composantes connexes, et si Z et Z' sont deux points de $\mathcal{C}$, on a $p(Z) \leq K_1\ p(Z') + K_2$ où K_1 et K_2 sont indépendantes de $\mathcal{C}$.

Si les conditions (a) et (b) relatives à un certain poids p sont satisfaites pour un couple de constantes (ε,C), la variété $\{F_1=F_2=\dots=F_n=0\}$ est de dimension 0.

Réciproquement, il peut arriver (comme c'est le cas lorsque $p=p_o$, et que les fonctions F_i sont des transformées de Fourier de mesures à support fini inclus dans $\mathbb{Q}^n$[2])que le fait que la variété $\{F_1=F_2=\dots=F_n=0\}$ soit discrète suffise à assurer l'existence de ε et C telles que les conditions (a) et (b) relatives au poids p soient satisfaites. Ceci est faux en général lorsque $p = p_o$ (par exemple pour n=1). L'objet de la première partie de ce travail est de démontrer que lorsque $p = p_o$ et $n = 2$, le résultat est encore vrai si les fonctions F_i sont des transformées de Fourier de distributions à support fini, inclus dans $\mathbb{Q}^2$; nous montrons même (théorème 1) que tout couple de telles fonctions satisfaisant $\dim(\{F_1=F_2=0\})=0$ est "fortement slowly decreasing" (en abrégé F.S.D.) pour le poids p_o au sens suivant :

Soit $(F_1, F_2, \ldots F_n)$ un n-uplet de $(A_p(\mathbb{C}^n))^n$;

$(F_1, F_2, \ldots F_n)$ est "fortement slowly decreasing" relativement au poids p si et seulement si, pour tout couple (ε, C) de constantes réelles positives, il existe deux réels positifs (ε_1, C_1) tels que

(a') les composantes connexes de l'ensemble où $\sum_{i=1}^{n} |F_i(Z)| < \varepsilon_1 e^{-C_1 p(}$ sont bornées ;

(b') si $\mathcal{C}$ est l'une de ces composantes connexes, et si Z et Z' sont deux points de $\mathcal{C}$, on a $d(Z,Z') = \|Z-Z'\| < \varepsilon \exp(-Cp(Z))$.

Dans le cas où n = 1, une transformée de Fourier de distribution à support fini est "fortement slowly decreasing" relativement au poids p_o (corollaire de la proposition 2-2). Le théorème 1 apparaît donc comme une généralisation de ce résultat au cas n = 2. La démonstration proposée par Gurevic dans [6], complète dans le cas où $p(Z) = \|Z\|$, semble poser problème dans le cas où $p = p_o$; nous utiliserons l'un des outils fondamentaux de cette démonstration.

Dans le cas où n = 2 et où les F_i sont des éléments de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$, l'exemple type de couple "slowly decreasing" au sens de Berenstein-Taylor reste, avec celui des couples de mesures, ou maintenant de distributions à support fini inclus dans $\mathbb{Q}^2$, l'exemple étudié par Delsarte et généralisé dans [10] ; nous avons aussi étudié dans [11] une autre famille d'exemples de cette situation.
Dans tous ces exemples, les F_i sont toujours, modulo une éventuelle perturbation, des mesures à support fini dans $\mathbb{R}^2$; ce support n'est plus nécessairement inclus dans $\mathbb{Q}^2$, mais les mesures sont en quelque sorte "gouvernées" par des masses de Dirac placées, comme dans l'exemple de Delsarte [10], aux sommets d'un polygone convexe compact du plan. Le problème motivant la seconde partie de ce travail est le suivant : soient μ_1 et μ_2 deux distributions de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ de la forme

$$\begin{cases} \mu_1 = a_1 \delta_{(o,o)} + b_1 \delta_{(1,o)} + c_1 \delta_{(o,1)} + d_1 \delta_{(1,1)} + \tau_1 \\ \mu_2 = a_2 \delta_{(o,o)} + b_2 \delta_{(1,o)} + c_2 \delta_{(o,1)} + d_2 \delta_{(1,1)} + \tau_2 \end{cases}$$

où τ_1 et τ_2 sont deux distributions à support compact, inclus dans $]0,1[^2$ le spectre d'un tel système (i-e l'ensemble $\{Z \in \mathbb{C}^2, \hat{\mu}_1(Z) = \hat{\mu}_2(Z) = 0\}$) est-il discret ? Si oui, les conditions (a) et (b) sont elles satisfaites pour le poids p_o et un couple de constantes (ε, C) ? Nous envisageons le cas où τ_1 et τ

sont à support fini, porté par un sous groupe de $\mathbb{R}^2$ de la forme $\mathbb{Z}(\alpha,\beta)$.

I Le théorème 1 et ses corollaires.

La notion de n-uplet "fortement slowly decreasing" ayant été définie dans le paragraphe d'introduction, nous nous proposons de démontrer ici le théorème suivant :

Théorème 1 : Soient μ_1 et μ_2 deux distributions de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$, à support fini, inclus dans $\mathbb{Q}^2$; on suppose que l'ensemble des couples (z,w) de $\mathbb{C}^2$ solutions du système $(*)$ $\hat{\mu}_1(z,w)=\hat{\mu}_2(z,w)$ est un ensemble discret. Le couple $(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2)$ est "fortement slowly decreasing" relativement au poids p_o défini par $p_o(z,w)= |\mathrm{Im}z|+|\mathrm{Im}w|+ \mathrm{Log}(1+\|Z\|)$.

Avant d'amorcer la preuve de ce théorème, donnons en deux corollaires.

Corollaire 1.1 Soient μ_1 et μ_2 deux distributions de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$, à support fini, inclus dans $\mathbb{Q}^2$; on suppose que l'ensemble des couples (z,w) de $\mathbb{C}^2$ solutions du système $(**)$ $\check{\hat{\mu}}_1(z,w)=\check{\hat{\mu}}_2(z,w)$ est un ensemble discret.

Les exponentielles polynômes solutions du système d'équations de convolution $\mu_1 * f = \mu_2 * f = 0$ forment une partie totale dans l'espace des solutions $\mathcal{E}^\infty$ de ce système (pour la topologie de la convergence uniforme de la fonction et de toutes ses dérivées sur tout compact de $\mathbb{R}^2$). De plus, on dispose d'un processus de représentation des solutions $\mathcal{E}^\infty$ de ce système donné dans l'énoncé du théorème 10.1 de [2].

Ce corollaire est une conséquence immédiate du théorème 10.1 de [2] ; en effet tout couple d'éléments de $A_{p_o}(\mathbb{C}^2)$ "fortement slowly decreasing" satisfait aux hypothèses de ce théorème ■

Corollaire 1.2 Soient μ_1 et μ_2 deux distributions de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$, à support fini, inclus dans $\mathbb{Q}^2$; on suppose que l'ensemble des couples (z,w) de $\mathbb{C}^2$ solutions du système $(*)$ $\hat{\mu}_1(z,w)=\hat{\mu}_2(z,w)=0$ est discret et inclus dans une bande logarithmique $|\mathrm{Im}z|+|\mathrm{Im}w|\leq C(1+\mathrm{Log}(1+\|Z\|))$.

Désignons par $N_{\mu_1,\mu_2}(R)$ le cardinal de $\{Z\in\mathbb{C}^2, \|Z\|\leq R, \hat{\mu}_1(z,w)=\hat{\mu}_2(z,w)=0\}$.

Il existe une constante C_o indépendante du couple (μ_1,μ_2) telle que

$$\overline{\lim_{R\to+\infty}} \left(\frac{N_{\mu_1,\mu_2}(R)}{R^2}\right) \leq C_o\, A(\mu_1)\, A(\mu_2) \text{ où } A(\mu) \text{ désigne,}$$

pour un élément de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$, sup $\{\|(x,y)\|,(x,y)\in \text{Supp}(\mu)\}$.

Ce corollaire est une conséquence immédiate du théorème 1 et de la proposition 2-4 de [11] ■

Remarque 1 lorsque μ_1 et μ_2 sont deux distributions de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$, à support fini inclus dans $\mathbb{Q}^2$, l'ensemble des couples de $\mathbb{C}^2$ solutions du système $\hat{\mu}_1(z,w)=\hat{\mu}_2(z,w)=0$ n'est en général pas inclus dans une bande logarithmique lorsqu'il est discret (cette situation se produit lorsque l'on a la configuration de Delsarte).

Cependant, s'il existe trois constantes ε,C,D telles que, J désignant le Jacobien,

$$\hat{\mu}_1(z,w)=\hat{\mu}_2(z,w)=0 \text{ et } J\,[\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2]\,(z,w)< \varepsilon e^{-Cp_o(Z)} \Rightarrow |\text{Im}z|+|\text{Im}w|\leq D(1+\text{Log}(1+\|Z\|))$$

il existe alors $C(\mu_1,\mu_2)$ telle que

$$\forall\, R\in\mathbb{R},\ R\geq 1,\ \int_1^R \frac{N_{\mu_1,\mu_2}(r)}{r}\,dr < C(\mu_1,\mu_2)\,R^2.$$

Cela résulte en effet du corollaire 1-2 et du théorème 3 de [8].

II Etude d'un cas particulier .

Nous allons dans ce paragraphe donner les idées principales de la démonstration du théorème 1 en envisageant le cas particulier où $\hat{\mu}_1(Z)=A_o(Z)\,e^{iz}+A_1(Z)$, $\hat{\mu}_2(Z)=B_o(Z)e^{iw}+B_1(Z)$, (A_o,A_1) et (B_o,B_1) désignant deux couples de polynômes premiers entre eux de $\mathbb{C}[X,Y]$.

Lemme 2-1 Soient A_o et A_1 deux polynômes de $\mathbb{C}[X,Y]$, premiers entre eux. Soit P un polynôme irréductible de $\mathbb{C}[X,Y]$, divisant la fonction analytique $F(z,w)=A_o(Z)e^{iz}+A_1(Z)$. Alors P est nécessairement de la forme $P(z,w)=c(z-z$

Nous allons montrer que la variété algébrique $\{P = 0\}$ se trouve dans une bande logarithmique de la forme: $|\text{Im}z|\leq C(1+\text{Log}(1+\|Z\|))$. Ceci étant fait, puisqu'il s'agit d'une variété algébrique, elle est en fait incluse dans une bande de la forme : $|\text{Im}z| \leq C'(1+\text{Log}(1+|z|))$. La fonction associant au couple (Z,w) le nombre $\frac{1}{z+2C'i}$, étant bornée sur cette variété

de Liouville, est en fait constante, ce qui prouvera bien le lemme (pour le résultat concernant les variétés de Liouville, voir par exemple la conclusion de [3]).

D'après les hypothèses du lemme, il existe une fonction U analytique sur $\mathbb{C}^2$ telle que

$$A_o(Z) = P(Z)\, U(Z) e^{-iz} - A_1(Z) e^{-iz} \quad (Z \in \mathbb{C}^2).$$

Les polynômes A_1 et P sont nécessairement premiers entre eux, car A_o et A_1 le sont ; nous avons donc

$$\exists\ T > 0,\ \exists\ \varepsilon > 0,\ \exists\ K > 0 \text{ tels que } \|Z\| > T \Rightarrow |P(Z)| + |A_1(Z)| > \frac{\varepsilon}{(1+\|Z\|)^K}$$

(comme conséquence au théorème des zéros de Hilbert, une variété algébrique de dimension 0 étant un ensemble fini).

Sur la variété algébrique $\{P=0\}$, nous avons donc

$$\|Z\| \leq T \text{ ou } |A_1(Z)| > \frac{\varepsilon}{(1+\|Z\|)^K} ;$$

Mais nous avons aussi

$$|A_o(Z) e^{iz}| = |A_1(Z)| > \frac{\varepsilon}{(1+\|Z\|)^K} .$$

Ceci prouve bien l'existence de la constante C telle que la variété algébrique $\{P=0\}$ se trouve dans une bande logarithmique: $|Imz| \leq C(1+Log(1+\|Z\|))$.

Lemme 2-2 Soit p un poids sous harmonique sur $\mathbb{C}$ satisfaisant aux conditions de Berenstein-Taylor [2] ; soit f un élément de $A_p(\mathbb{C})$; on suppose qu'il existe un entier n, deux constantes positives ε_o, C_o telles que

$$\sum_{k=o}^{n} |f^{(k)}(z)| > \varepsilon_o\, e^{-C_o p(z)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

L'élément f de $A_p(\mathbb{C})$ est alors "fortement slowly decreasing" relativement au poids p.

Fixons ε,C, comme dans la définition de "fortement slowly decreasing".
Choisissons pour l'instant $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon_o}{2}$, $C_1 > C_o$; considérons une composante connexe de l'ensemble des z tels que $\sum_{k=o}^{n-1} |f^{(k)}(z)|$ soit inférieur à $\varepsilon_1 e^{-C_1 p(z)}$; si z_o est un point de cette composante connexe, on a néces-

sairement $|f^{(n)}(z_o)| > \frac{\varepsilon_o}{2}\ e^{-C_o p(z_o)}$, et l'on voit immédiatement, quitte à améliorer en fonction de ε et de C le choix de ε_1 et C_1, que la composante connexe en question se trouve dans la boule de centre z_o et de rayon $\varepsilon\ e^{-Cp(z_o)}$. La preuve du lemme 2-2 s'obtient en itérant ce raisonnement ; l'idée essentielle est en fait l'utilisation de la formule de Taylor : k étant fixé dans $\mathbb{N}$, il existe un élément $h_k^{z_o}$ de

$A_p(\mathbb{C})$, avec $f(z) = \sum_{p=o}^{k-1} (z-z_o)^p\ f^{(p)}(z_o) + (z-z_o)^k h_k^{z_o}(z)$ et $h_k^{z_o}(z_o) = f^{(k)}(z_o)$.

Ce type de raisonnement est aussi la clef de la proposition 1-1 de [11] ■

<u>Lemme 2-3 Soit f une exponentielle-polynôme d'une variable complexe z à fréquences imaginaires pures ; f est un élément de $Ap_o(\mathbb{C})$ "fortement slowly decreasing" relativement au poids p_o ; si les fréquences ne sont pas imaginaires pures, f est "fortement slowly decreasing" relativement au poids $p(z) = |z|$.</u>

Le fait que f satisfasse aux hypothèses du lemme 2-2 pour le poids p_o (ou p) est une propriété classique des exponentielles polynômes d'une variable à fréquences imaginaires pures (voir [1], [2,(7.9)]), ou non (on remplace alors p_o par $p(z)=|z|$) ■

Donnons nous maintenant deux couples (A_o, A_1) et (B_o, B_1) de polynômes premiers entre eux de $\mathbb{C}[X,Y]$ (A_o et A_1 sont copremiers, comme B_o et B_1). Nous allons prouver que le couple $(A_o\ e^{iz} + A_1,\ B_o\ e^{iw} + B_1)$ est "fortement slowly decreasing" relativement au poids p_o.

D'après la proposition 1-1 de [11] (qui est l'analogue du lemme 2-2 avec n=1 en dimension 2), il suffit de montrer que pour tout couple (ε, C) de constantes réelles positives, il existe deux réels (ε_1, C_1) tels q

(a") les composantes connexes de l'ensemble des couples (z,w) de $\mathbb{C}^2$ où $|F_1(Z)| + |F_2(Z)| + |J[F_1, F_2](Z)| < \varepsilon_1\ e^{-C_1\ p_o(Z)}$ sont bornées (on a posé $F_1(Z) = A_o(Z)\ e^{iz} + A_1(Z)$, $F_2(Z) = B_o(Z)\ e^{iw} + B_1(Z)$) ;

(b") Si $\mathcal{C}$ est l'une de ces composantes connexes, et si Z et Z' sont deux points de $\mathcal{C}$, on a $d(Z,Z') \leq \varepsilon\ e^{-Cp_o(Z)}$.

Le calcul du jacobien de F_1 et F_2 (que nous avons noté $J[F_1,F_2]$) nous montre qu'il existe un polynôme non identiquement nul Φ tel que

(2.1) $\quad A_o B_o\, J[F_1,F_2] - \Phi \in F_1\, A_{p_o}(\mathbb{C}^2) + F_2\, A_{p_o}(\mathbb{C}^2).$

Considérons l'un des facteurs irréductibles du polynôme Φ décomposé dans $\mathbb{C}[X,Y]$; si ce facteur P n'est pas de la forme c(z-zo), P ne peut diviser F_1. Il est alors facile de montrer (et nous le ferons de manière plus générale en prouvant le lemme 3-1') qu'il existe une exponentielle polynôme P_1 de la seule variable z telle que

$$P_1 \in F_1\, A_{p_o}(\mathbb{C}^2) + P\, A_{p_o}(\mathbb{C}^2),\ P_1 \not\equiv 0.$$

Dans le cas où P est de la forme c(z-zo), on pose $P_1 = P$.
Nous avons donc su associer au facteur P un couple (P_1, P_2) d'exponentielles polynômes, l'une de la seule variable z, l'autre de la seule variable w, telles que

$$P_i \in F_i\, A_{p_o}(\mathbb{C}^2) + P\, A_{p_o}(\mathbb{C}^2),\ P_i \not\equiv 0\ (i=1,2).$$

Achevons la preuve de la démonstration du théorème 1 dans ce cas particulier en supposant, pour fixer les idées $\Phi = P\,Q$, où P et Q sont deux polynômes irréductibles premiers entre eux de $\mathbb{C}[X,Y]$; la démonstration est exactement la même lorsque Φ est factorisé dans $\mathbb{C}[X,Y]$. Fixons donc ε et C ; nous allons construire ε_1 et C_1 de manière à ce que (a") et (b") soient vérifiées.

Fixons pour l'instant arbitrairement ε_1 et C_1 et considérons un point Z_o en lequel $|F_1(Z_o)|+|F_2(Z_o)|+|J[F_1, F_2](Z_o)| < \varepsilon_1\, e^{-C_1 p_o(Z_o)}$.

Grâce au lemme 2-3, il existe à l'intérieur de la boule de centre Z_o et de rayon $\frac{\varepsilon}{2}\, e^{-C p_o(Z_o)}$ un polydisque δ_{Z_o} de centre Z_o sur la frontière duquel $|P_1(Z)|+|P_2(Z)| > \varepsilon_2\, e^{-C_2 p_o(Z)}$ (ε_2 et C_2 sont à déterminer en fonction de ε et de C). Il existe donc ε_3 et C_3, liés à ε_2 et C_2 tels que, sur la frontière de ce polydisque δ_{Z_o}, on ait

$$|F_1(Z)|+|F_2(Z)|+|P(Z)| > \varepsilon_3\, e^{-C_3\, p_o(Z)}.$$

Plaçons nous maintenant en un point Z de la frontière de δ_{Z_o} en lequel on ait

$$|F_1(Z)|+|F_2(Z)| < \frac{\varepsilon_3}{2}\, e^{-C_3\, p_o(Z)}\ ;$$

en ce point, nous avons donc $|P(Z)| > \frac{\varepsilon_3}{2} e^{-C_3 p_o(Z)}$; une telle inégalité (avec $\frac{\varepsilon_3}{4}$ au lieu de $\frac{\varepsilon_3}{2}$) est encore valable dans $B(Z, \varepsilon_4 e^{-C_4 p_o(Z)})$.

Reprenons à l'intérieur de cette boule, mais avec le polynôme Q, le raisonnement précédent :

nous pouvons donc associer au point Z un polydisque de centre Z, inclus dans $B(Z, \varepsilon_4 e^{-C_4 p_o(Z)})$, sur la frontière duquel on ait

$$|F_1(Z)|+|F_2(Z)|+|Q(Z)| > \varepsilon_5 e^{-C_5 p_o(Z)} \text{ et } |P(Z)| > \frac{\varepsilon_3}{2} e^{-C_3 p_o(Z)},$$

donc aussi $|F_1(Z)|+|F_2(Z)|+|\Phi(Z)| > \varepsilon'_5 e^{-C'_5 p_o(Z)}$ ($\varepsilon'_5 = \frac{\varepsilon_5 \varepsilon_3}{2}$, $C'_5 = C_3 + C_5$).

Nous pouvons également associer un tel polydisque à tout point de la frontière de δ_{Z_o} en lequel $|F_1(Z)|+|F_2(Z)| > \frac{\varepsilon_3}{2} e^{-C_3 p_o(Z)}$. Sur le bord de tout polydisque associé ainsi à un point de δ_{Z_o}, nous avons

$$|F_1(Z)|+|F_2(Z)|+|J[F_1,F_2](Z)| > \varepsilon_6 e^{-C_6 p_o(Z)}.$$

Il suffit donc de choisir $\varepsilon_1 < \varepsilon_6$, $C_6 > C_1$ pour conclure. Ceci achève la preuve du théorème 1 dans ce cas particulier ; remarquons que l'on a démontré que l'ensemble des couples de $\mathbb{C}^2$ solutions de $F_1(Z) = F_2(Z) = 0$ était discret ■

Remarque 2 Soient F_1 et F_2 deux éléments de $A_{p_o}(\mathbb{C}^2)$ de la forme

$$(2.2) F_1(z,w) = \sum_{k=o}^{m} A_k(z,w) e^{i(m-k)z}, \quad F_2(z,w) = \sum_{k'=o}^{n} B_{k'}(z,w) e^{i(n-k')w},$$

où $(A_o, A_1, \ldots A_m)$ et $(B_o, B_1, \ldots B_n)$ sont deux familles de polynômes de $\mathbb{C}[X,Y]$ dont les éléments sont premiers entre eux ; dans ce cas (2.1) se trouve remplacée par (2.1') où

(2.1') il existe un entier p, p+1 éléments de $\mathbb{C}[X,Y]$, $(\Phi_r)_{r=o}^{r=p}$ tels que :

$$\sum_{r=o}^{p} \Phi_r (J[F_1,F_2])^{p-r} \in F_1 A_{p_o}(\mathbb{C}^2) + F_2 A_{p_o}(\mathbb{C}^2), \quad \Phi_o \not\equiv 0.$$

Le raisonnement que nous avons fait précédemment reste valable lorsque Φ_p n'est pas identiquement nul ; nous serons amenés, pour démontrer le théorème 1 dans le cas général, à factoriser F_1 et F_2 et à étudier le

problème localement. Remarquons toutefois que lorsque Φ_p n'est pas identiquement nul, la remarque 1 du premier paragraphe et les méthodes développées ci-dessus nous montrent que si $F_1 = \hat{\mu}_1$, $F_2 = \hat{\mu}_2$ (F_1 et F_2 étant toujours de la forme (2.2)), il existe une constante $C(\mu_1, \mu_2)$ telle que

$$\forall\, R \in \mathbb{R},\ R \geq 1,\ \int_1^R \frac{N_{\mu_1,\mu_2}(r)}{r}\, dr < C(\mu_1,\mu_2)\, R^2.$$

III La démonstration du théorème 1

Nous pouvons supposer que μ_1 et μ_2 sont deux distributions de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$, à support fini inclus dans $(-\mathbb{N})^2$; l'hypothèse essentielle est que le spectre du couple (μ_1, μ_2) c'est à dire $\{Z \in \mathbb{C}^2, \hat{\mu}_1(z,w)=\hat{\mu}_2(z,w)=0\}$ soit discret. Montrons dans un premier temps que l'étude du cas général se ramène à celle du cas particulier où $\hat{\mu}_1$ et $\hat{\mu}_2$ sont de la forme 2.2.

Lemme 3.1 *Soient F_1 et F_2 deux exponentielles polynômes de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$, à fréquences dans $(i\mathbb{N})^2$; on suppose que $\{ Z \in \mathbb{C}^2, F_1(Z)=F_2(Z)=0\}$ est discret. Il existe deux familles de polynômes de $\mathbb{C}[X,Y]$, que nous noterons $(A_k)_{k=o}^n$, $(B_{k'})_{k'=o}^m$ telles que l'on ait*

$$G_i \in F_1\, A_{p_o}(\mathbb{C}^2) + F_2\, A_{p_o}(\mathbb{C}^2)\ (i=1,2)$$

où $G_1(z,w)= \sum_{k=o}^{n} A_k(z,w)\, e^{i(n-k)z}$, $G_2(z,w)= \sum_{k'=o}^{m} B_{k'}(z,w) e^{i(m-k')w}$, $(Z\in\mathbb{C}^2)$.

Prouvons ce lemme de manière algébrique. Soit $\mathcal{A}$ l'anneau des transformées de Fourier des distributions à support fini, porté par $\mathbb{Z}(1,0)$; c'est un sous anneau unifère de $A_{p_o}(\mathbb{C}^2)$; on notera $\mathcal{K}$ son corps des fractions.
Si $F_i(z,w)=\Sigma\, A_{r,s}^{(i)}\, e^{i(rz+sw)}$ $(i=1,2)$, considérons l'élément de $\mathcal{K}(T)$ défini par

$$\tilde{F}_i(T)= \Sigma\, \tilde{A}_s^{(i)}\, T^s, \text{ où } \tilde{A}_s^{(i)}(Z)= \sum_r A_{r,s}(Z)\, e^{riz} (i=1,2).$$

On peut supposer $\tilde{F}_1$ et $\tilde{F}_2$ de degré supérieur ou égal à 1, non divisibles par T.
Les deux polynômes $\tilde{F}_1$ et $\tilde{F}_2$ sont premiers entre eux dans $\mathcal{K}[T]$; si en effet ils ne l'étaient pas, il existerait r dans $\mathbb{N}$, il existerait r+3 éléments non nuls de $\mathcal{A}$ (ρ_1, ρ_2 et $(\sigma_p)_{p=o}^r$), r+1 entiers naturels distincts $(n_p)_{p=o}^r$ tels que la fonction analytique définie par

$$\forall (z,w) \in \mathbb{C}^2,\ \Phi(z,w) = \sum_{p=o}^{r} \sigma_p(z,w)\ e^{in_p w}$$

divise à la fois $\rho_1 F_1$ et $\rho_2 F_2$.

Choisissons alors z_o de manière à ce que la fonction

$$w \to \rho_1(z_o,w)\ \rho_2(z_o,w)\ \sigma_o(z_o,w)\ \sigma_1(z_o,w)$$

ne soit pas identiquement nulle ; la fonction associant à w le nombre $\Phi(z_o,w)$ ayant nécessairement une infinité de zéros, il existe un élément w_o tel que $\Phi(z_o,w_o) = 0$, $\rho_1(z_o,w_o)\ \rho_2(z_o,w_o) \neq 0$; puisque Φ divise F_1 et F_2 dans un voisinage de (z_o,w_o) on aboutit à une contradiction avec l'hypothèse de discrétion du spectre de F_1 et F_2. L'existence de G_1 et G_2 résulte du théorème de Bezout ∎

Nous aurons également besoin du résultat suivant :

Lemme 3-1' : Soit F une exponentielle polynôme de deux variables, à fréquences dans $i\mathbb{N} \times \{0\}$, dont les coefficients polynômiaux sont premiers entre eux dans leur ensemble ; soit P un polynôme irréductible de $\mathbb{C}[X,Y]$ tel que $P'_w \not\equiv 0$. Le résultant de F(z,w) et P(z,w) considérés comme polynômes en la variable w n'est pas identiquement nul.

Supposons que P s'écrive sous la forme :

$$P(z,w) = u_0(z)w^p + \sum_{\ell=1}^{p} u_\ell(z)\ w^{p-\ell},\ \text{avec } u_o \not\equiv 0.$$

Il existe d'autre part un polynôme de $\mathbb{C}[X,Y,T]$ de la forme $\widetilde{F}(X,Y,T) = \sum_{k=0}^{n} A_k(X,Y)\ T^k$ tel que : $\forall (z,w) \in \mathbb{C}^2$, $F(z,w) = \widetilde{F}(z,w,e^{iz})$; la sous-variété algébrique de $\mathbb{C}^2$ définie comme $\{(z,w) \in \mathbb{C}^2,\ A_k(z,w) = 0,\ k = 0,\ldots,m\}$ est de dimension 0, donc compacte, incluse dans B(0,R).

Soit $z_o \in \mathbb{C}$, $|z_o| > R$ et $u_o(z_o) \neq 0$. D'après la théorie de l'élimination, si le résultant de $\widetilde{F}(z,w,T)$ et de P(z,w) considérés comme polynômes en w était identiquement nul, on aurait en particulier :

$$\forall\ T \in \mathbb{C},\ \exists\ w_o^{(T)} \in \mathbb{C},\ \text{tel que } P(z_o,w_o^{(T)}) = \widetilde{F}(z_o,w_o^{(T)},\ T) = 0.$$

L'équation $P(z_o,w_o^{(T)}) = 0$ n'ayant qu'un nombre fini de racines, il existerait alors w_o tel que $A_k(z_o,w_o) = 0$, $k = 0,\ldots,m$, ce qui est impossible car $|z_o| > R$.

Si l'on note R(z,w,T) ce résultant, on a évidemment $R(z,w,e^{iz}) \equiv 0$ ∎

Ce lemme ne nous permet cependant pas de nous ramener au cas où $\hat{\mu}_1$ et $\hat{\mu}_2$ sont de la forme (2.2) ; en effet le spectre de G_1 et G_2 n'est plus nécessairement discret ; nous allons généraliser le lemme 2.1, selon une idée due à Gurevic et à Berenstein.

Lemme 3.2 Soit F une exponentielle polynôme définie sur $\mathbb{C}^2$, à fréquences complexes [resp : imaginaires pures]; soit P un polynôme irréductible de $\mathbb{C}[X,Y]$ ne divisant pas tous les coefficients polynomiaux de F. Si P n'est pas un polynôme affine, ou si P est un polynôme affine ne divisant pas F, la restriction de F à la variété algébrique $\{P=0\}$ est "fortement slowly decreasing" relativement au poids $p(Z)=\|Z\|$ [resp $p(Z)= p_o(Z)$ lorsque "affine" signifie de la forme $\alpha z + \beta w + \gamma$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$].

La seconde partie du lemme (lorsque P est affine) est triviale ; dire en effet que la restriction de F à la variété algébrique $\{P=0\}$ est F.S.D. revient à dire qu'à tout couple (ε, C) de constantes positives, l'on peut associer un couple de constantes (ε_1, C_1) de manière à ce que (a") et (b") soient vérifiées pour les composantes connexes de la trace sur la variété $\{P=0\}$ de $\{Z \in \mathbb{C}^2, |F(Z)| < \varepsilon_1 e^{-C_1 p(Z)}\}$ $(p(Z)=\|Z\|$ ou $p(Z)=p_o(Z))$. On applique le lemme 2.3.

Nous allons donc supposer que P n'est pas affine et raisonner par récurrence sur le nombre n(F) de termes de la forme $Q(Z)\, e^{(\lambda z+\mu w)}$, où $Q \in \mathbb{C}[X,Y]$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$, figurant dans le développement de F.

Lorsque n(F)= 1, nous avons, à un facteur exponentiel près, F=Q, où $Q \in \mathbb{C}[X,Y]$; comme P et Q sont premiers entre eux, il existe T, ε, C tels que

$$\|Z\| \geq T \Rightarrow |P(Z)|+|Q(Z)| > \varepsilon\, e^{-C\, p(Z)} \ ;$$

le lemme est dans ce cas démontré.

Supposons le résultat démontré lorsque $n(F) < N$, où $N \in \mathbb{N}^*$, $N > 1$.

Nous supposerons que F s'écrit sous la forme :

$$F(Z) = \sum_{k=0}^{N} Q_k(z,w)\, e^{\lambda_k z+\mu_k w}, \text{ où}$$

aucun des coefficients Q_k n'est divisible par P, où $k \neq k' \Rightarrow (\lambda_k,\mu_k) \neq (\lambda_{k'}, \mu_{k'})$.

Définissons l'opérateur differentiel ∇ par :

$$\nabla = P'_z(\ )\ \frac{\partial}{\partial w} - P'_w(\ )\ \frac{\partial}{\partial z}\ .$$

Il est immédiat de vérifier :

$$\nabla F(Z) = \sum_{k=0}^{N} R_k(z,w)\ e^{\lambda_k z+\mu_k w}\ ,$$ où les R_k sont aussi des polynômes de $\mathbb{C}[X,Y]$.

Nous poserons $G = Q_N\ \nabla_F - R_N\ F$.

Puisque P et P'_w sont premiers entre eux, il existe T, ε_o, C_o tels que, si Z_o est un point de la variété $\{P = 0\}$ tel que $\|Z_o\| \geq T$, cette variété puisse être envisagée dans $B(Z_o,\ \varepsilon_o\ e^{-C_o p(Z_o)})$ sous la forme $w = \varphi(z)$ avec

$$\varphi'(z) = \frac{-P'_z(z,\varphi(z))}{P'_w(z,\varphi(z))}$$

En améliorant éventuellement le choix de T, nous pouvons également supposer que, dans $B(Z_o,\ \varepsilon_o\ e^{-C_o p(Z_o)})$, on a : $Q_N(Z) \geq \varepsilon_o\ e^{-C_o p(Z_o)}$ (on améliore pour cela également les choix de ε_o et de C_o).

Il est impossible que P divise l'un des coefficients $Q_N\ R_k - R_N\ Q_k$, pour $k \in \{0,\ldots,N-1\}$; si tel était le cas, on aurait, dans $B(Z_o,\ \varepsilon_o\ e^{-C_o p(Z_o)})$:

$$P(Z) = 0 \Rightarrow P'_z\ \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{Q_k}{Q_N}\right) - P'_w\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Q_k}{Q_N}\right) - (\mu_k-\mu_N)\ P'_z\ \frac{Q_k}{Q_N}$$
$$+ (\lambda_k-\lambda_N) P'_w\ \frac{Q_k}{Q_N} = 0\ .$$

Ceci s'écrit encore, si $(z,\varphi(z)) \in B(Z_o,\ \varepsilon_o\ e^{-C_o p(Z_o)})$:

$$\Psi'(z) = \left[(\lambda_N-\lambda_k) + \varphi'(z)(\mu_N-\mu_k)\right] \Psi(z)\ .$$

Comme $\Psi(z) \not\equiv 0$, $\exists\ \lambda \in \mathbb{C}^*$, tel que :
$\forall\ Z \in B(Z_o,\ \varepsilon_o\ e^{-C_o p(Z)})$, $P(Z)=0 \Rightarrow \frac{Q_k}{Q_N}(Z) = e^{(\lambda_N-\lambda_k)z+(\mu_N-\mu_k)W}$.

D'après le lemme 3.1', ceci est impossible dès que P n'est pas de la forme $(\lambda_N-\lambda_k)z + (\mu_N-\mu_k)\, w + \rho$.

Comme $n(G) < n(F) = N$, nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence à la situation (G,P).

Or, dans $B(Z_o, \varepsilon_o\, e^{-C_o p(Z_o)})$, on a :

$$G(z,\varphi(z)) = Q_N(z,\varphi(z))\; P'_w(z,\varphi(z))\; \frac{d}{dz} F(z,\varphi(z)) - R_N(z,\varphi(z))\; F(z,\varphi(z)).$$

Nous concluons alors grâce à l'argument déjà utilisé lors de la preuve du lemme 2.2 ∎

Lorsque $\hat{\mu}_1$ et $\hat{\mu}_2$ sont de la forme (2·2), nous pouvons démontrer le théorème 1 en utilisant l'idée de raisonnement du paragraphe 2.

Lemme 3.3 *Soient m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$; soient $(p_o, p_1, \ldots, p_m)$ et $(q_o, q_1, \ldots, q_n)$ deux suites strictement décroissantes d'entiers naturels; soient $(A_o, A_1, \ldots A_m)$ et $(B_o, B_1, \ldots B_n)$ deux familles finies de polynômes de $\mathbb{C}[X,Y]$ dont les éléments sont premiers entre eux (dans chaque famille).*

On considère les deux exponentielles polynômes de $\mathbb{C}^2$ définies par

$$F_1(z,w) = \sum_{k=o}^{m} A_k(z,w)\, e^{ip_k z},\quad F_2(z,w) = \sum_{k'=o}^{n} B_{k'}(z,w)\, e^{iq_{k'} w}.$$

Le couple (F_1, F_2) est "fortement slowly decreasing" relativement au poids p_o.

Pour alléger les notations, on notera p le poids p_o.

Désignons par K_o le corps des fractions de l'anneau unifère $\mathbb{C}[X,Y]$

Nous allons supposer dans un premier temps que les polynômes $\sum_{k'=o}^{m} A_k\, T^{p_k}$ et $\sum_{k'=o}^{n} B_{k'}\, T^{q_{k'}}$ sont irréductibles dans $K_o[T]$.

D'après le théorème de Bezout, il existe deux polynômes non identiquement nuls Δ_1 et Δ_2 de $\mathbb{C}[X,Y]$ tels que

$$\Delta_1 \in F_1\, A_{p_o}(\mathbb{C}^2) + H_1\, A_{p_o}(\mathbb{C}^2) \text{ où } H_1(z,w) = \sum_{k=o}^{m} p_k\, A_k(Z)\, e^{i(p_k-1)z}$$

$$\Delta_2 \in F_2\, A_{p_o}(\mathbb{C}^2) + H_2\, A_{p_o}(\mathbb{C}^2) \text{ où } H_2(z,w) = \sum_{k'=o}^{n} q_{k'}\, B_{k'}(Z)\, e^{i(q_{k'}-1)w}$$

Considérons maintenant dans un ouvert ω de $\mathbb{C}^2$ deux fonctions analytiques ρ et σ telles que

$$\sum_{k=o}^{m} A_k(z,w)\ (\rho(z,w))^{p_k} = \sum_{k'=o}^{n} B_{k'}(z,w)\ (\sigma(z,w))^{q_{k'}} = 0,\quad Z \in \omega.$$

Soit

$$T(\rho,\sigma)(Z) = \begin{vmatrix} i\rho(Z) - \frac{\partial\rho}{\partial z}(Z) & -\frac{\partial\sigma}{\partial z}(Z) \\ -\frac{\partial\rho}{\partial w}(Z) & i\sigma(Z) - \frac{\partial\sigma}{\partial w}(Z) \end{vmatrix} \left(\sum_{k=o}^{m} p_k\ A_k(Z)\ \rho^{p_k-1}(Z) \right) \times$$

$$\times \left(\sum_{k'=o}^{n} q_k, B_k(Z) \sigma^{q_{k'}-1}(Z) \right), \qquad (Z \in \omega).$$

La théorie de l'élimination nous montre qu'il existe une famille finie de polynômes $(\Phi_{k''})_{k''=o}^{p}$ et une suite strictement décroissante d'entiers $(r_{k''})_{k''=o}^{p}$, ne dépendant pas de l'ouvert ω, telles que

$$\sum_{k''=o}^{p} \Phi_{k''}(z,w)\ (T(\rho,\sigma)\ (Z))^{r_{k''}} = 0\ ,\quad Z \in \omega,$$

(car T est algébrique sur $\mathcal{K}_o(T)$).
Soit $\mathcal{C}$ la famille de polynômes $\{\Delta_1, \Delta_2, \Phi_p, A_o, B_o\}$.

Donnons nous ε et C, choisissons un point Z_o de $\mathbb{C}^2$ tel que

$|F_1(Z_o)|+|F_2(Z_o)| < \varepsilon_1\ e^{-C_1\ p(Z_o)}$ (ε_1 et C_1 sont pour l'instant arbitraires, leur choix sera défini par la suite).

En factorisant en produits de polynômes irréductibles les différents polynômes de la famille $\mathcal{C}$, on montre, en utilisant le fait que les seules variétés algébriques irréductibles incluses dans la variété $\{F_1 = 0\}$ sont de la forme $\{z=z_o\}$ (ceci résulte du lemme 3.2), et la méthode développée dans le précédent paragraphe, qu'il existe un voisinage connexe compact δ_{Z_o} de Z_o inclus dans $B(Z_o, \frac{\varepsilon}{2}\ e^{-Cp(Z_o)})$ sur le bord duquel

$$\forall\ Z \in \partial(\delta_{Z_o}),\ \forall\ P \in \mathcal{C},\ |F_1(Z)|+|F_2(Z)|+|P(Z)| > \varepsilon' e^{-C' p(Z)}$$

où ε' et C' ne dépendent que de ε et C, ainsi que de F_1 et F_2.

Soit Z_1 un point de $\partial(\delta_{Z_o})$, tel que $|F_1(Z_1)|+|F_2(Z_1)|< \frac{\varepsilon'}{2}\, e^{-C'p(Z_1)}$.

D'après le théorème des fonctions implicites, et puisque Δ_1 et Δ_2 appartiennent à $\mathcal{C}$, on peut construire, dans une boule de centre Z_1 et de rayon $\varepsilon'' e^{-C''p(Z_o)}$ (ε'' et C'' sont déterminés en fonction de ε' et C', mais l'on impose $\varepsilon'' < \frac{\varepsilon}{2}$, $C'' > C$), p_o fonctions holomorphes $(\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{p_o})$, q_o fonctions holomorphes $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{q_o})$ telles que

(i) dans $B(Z_1, \varepsilon'' e^{-C''p(Z_o)})$, on ait :

$$F_1(z,w)=A_o(Z) \prod_{s=1}^{p_o} (e^{iz} - \rho_s(Z)) ,$$

$$F_2(z,w)=B_o(Z) \prod_{t=1}^{q_o} (e^{iw} - \sigma_t(Z)) ;$$

(ii) $\sum_{k=o}^{m} A_k(z,w)[\rho_s(z,w)]^{p_k} = 0$, $s \in \{1,\ldots p_o\}$, $Z \in B(Z_1, \varepsilon'' e^{-C''p(Z_o)})$;

(iii) $\sum_{k'=o}^{n} B_{k'}(z,w)[\sigma_t(z,w)]^{q_{k'}} = 0, t \in \{1,\ldots q_o\}, Z \in B(Z_1, \varepsilon'' e^{-C''p(Z_o)})$.

D'autre part, il existe deux constantes positives β et B ne dépendant que de ε', C', F_1 et F_2, telles que

$$\min_{\substack{1\le s\le p_o \\ 1\le s'\le p_o \\ s\neq s'}} d(\rho_s(Z_1),\rho_{s'}(Z_1)) > \beta\, e^{-Bp(Z_o)} ;$$

$$\min_{\substack{1\le t\le q_o \\ 1\le t'\le q_o \\ t\neq t'}} d(\sigma_t(Z_1), \sigma_{t'}(Z_1)) > \beta\, e^{-Bp(Z_o)} .$$

Nous allons montrer que $T(\rho_s, \sigma_t)$ ($s \in \{1,\ldots,p_o\}, t \in \{1,\ldots,q_o\}$) ne peut être identiquement nulle dans $B(Z_1, \varepsilon'' e^{-C''p(Z_o)})$; si tel était le cas, le jacobien des fonctions analytiques $\rho_s e^{-iz}$ et $\sigma_t e^{-iw}$ serait identiquement nul dans $B(Z_1, \varepsilon'' e^{-C''p(Z_o)})$. Comme ni ρ_s ni σ_t ne peuvent

être identiquement nulles (à cause des hypothèses faites sur l'irréductibilité dans $\mathcal{K}_o[T]$ de $\sum_{k=o}^{m} A_k T^{p_k}$ et de $\sum_{k'=o}^{n} B_{k'} T^{q_{k'}}$), il existe un point Z'_1 dans $B^o(Z_1, \varepsilon'' e^{-C''p(Z_o)})$ tel que $\rho_s(Z'_1)\,\sigma_t(Z'_1) \neq 0$. Les zéros communs, dans $B^o(Z_1, \varepsilon'' e^{-C''p(Z_o)})$, des deux fonctions analytiques

$$f_1^{(s,t)}(z,w) = e^{iz} - \frac{\rho_s(z,w)}{\rho_s(Z'_1)} e^{iz'_1} \quad \text{et} \quad f_2^{(s,t)}(z,w) = e^{iw} - \frac{\sigma_t(z,w)}{\sigma_t(Z'_1)} e^{iw'_1}$$

sont nécessairement isolés ; cela résulte de ce que le spectre du système

$$(*) \quad \sum_{k=o}^{m} A_k(z,w)(\rho_s(Z'_1) e^{-iz'_1})^{p_k} e^{ip_k z} = \sum_{k'=o}^{n} B_{k'}(z,w)(\sigma_s(Z'_1) e^{-iw'_1})^{q_{k'}} e^{iq_{k'}w} = 0$$

est discret (d'après le lemme 3.2 et le fait que toute composante analytique de dimension 1 de l'ensemble des points vérifiant un système de la forme (*) est algébrique (voir [12] ou dans cette thèse, §5, pp 4.1)

Lorsque deux fonctions analytiques dans un voisinage de (0,0) ont un zéro commun isolé en (0,0), le jacobien de ces deux fonctions ne peut appartenir à l'idéal de fonctions analytiques qu'elles engendrent au voisinage de (0,0) ; cela résulte du théorème des résidus (voir par exemple [7], p34, ou [2], [4]).

Le Jacobien des fonctions $f_1^{(s,t)}$ et $f_2^{(s,t)}$ ne peut donc être nul dans $B(Z_1, \varepsilon'' e^{-C''p(Z_o)})$. Cela nous prouve bien que $T(\rho_s, \sigma_t)$ ne peut être identiquement nulle dans $B(Z_1, \varepsilon'' e^{-C''p(Z_o)})$.

Nous avons donc, dans $B(Z_1, \varepsilon'' e^{-C''p(Z_o)})$

$$(**) \quad \sum_{k''=o}^{p} \Phi_{k''}(z,w)[T(\rho_s,\sigma_t)(Z)]^{r_{k''}-r_p} \equiv 0, \quad s \in \{1,\dots p_o\}, t \in \{1,\dots q_o\}.$$

Reprenons maintenant la preuve du lemme.
Si le choix de ε' et C' est amélioré, ainsi donc que celui de ε'' et de C'', nous pouvons supposer qu'il existe des constantes ε_2, ε_3, C_2, C_3 telles que

$$\exists\, s_1 \in \{1,\dots,p_o\},\ \forall\, Z \in B(Z_1, \varepsilon'' e^{-C''p(Z_o)}),$$

$$(3.2)\qquad \begin{cases} |e^{iz} - \rho_{s_1}(Z_1)| < \varepsilon_2 e^{-C_2 p(Z_1)} \\ \prod_{\substack{s'=1 \\ s' \neq s_1}}^{p_o} |e^{iz} - \rho_{s'}(Z)| > \varepsilon_3 e^{-C_3 p(Z)} \end{cases} .$$

$$\exists t_1 \in \{1,\ldots,q_o\},\ \forall Z \in B(Z_1,\ \varepsilon''\, e^{-C'' p(Z_o)}) ,$$

$$(3.2')\qquad \begin{cases} |e^{iw} - \sigma_{t_1}(Z_1)| < \varepsilon_2\, e^{-C_2\, p(Z_1)} \\ \prod_{\substack{t'=1 \\ t' \neq t_1}}^{q_o} |e^{iw} - \sigma_{t'}(Z)| > \varepsilon_3\, e^{-C_3\, p(Z)} \end{cases} .$$

D'après $(**)$, et puisque Φ_p appartient à la famille $\mathcal{C}$, il existe ε_4 et C_4 dépendant de ε' et C', indépendants de Z_1, tels que

$$\forall s \in \{1,\ldots p_o\},\ \forall t \in \{1,\ldots,q_o\},\ |T(\rho_s,\sigma_t)\ (Z_1)| > \varepsilon_4\, e^{-C_4\, p(Z_1)} .$$

Un calcul immédiat nous montre, puisque Δ_1 et Δ_2 sont dans $\mathcal{C}$, qu'il existe ε_5 et C_5, dépendants de ε_4 et C_4, mais non de Z_1, tels que

$$\forall s \in \{1,\ldots p_o\}, \forall t \in \{1,\ldots q_o\}, |e^{iz_1} - \rho_s(Z_1)| + |e^{iw_1} - \sigma_t(Z_1)| + |J_{s,t}(Z_1)| > \varepsilon_5 e^{-C_5 p(Z_1)} ,$$

où $J_{s,t}$ désigne le jacobien des fonctions $e^{iz} - \rho_s(Z)$ et $e^{iw} - \sigma_t(Z)$. En effet on a, dans $B(Z_1,\ \varepsilon''\, e^{-C'' p(Z_o)})$,

$$J_{s,t}(Z) = \begin{vmatrix} i\rho_s(Z) - \dfrac{\partial \rho_s}{\partial z}(Z) & -\dfrac{\partial \sigma_t}{\partial w}(Z) \\ -\dfrac{\partial \rho_s}{\partial w}(Z) & i\sigma_t(Z) - \dfrac{\partial \sigma_t}{\partial w}(Z) \end{vmatrix} + k_{s,t}(Z) \ , \text{ où}$$

$$k_{s,t}(Z) = i(e^{iz} - \rho_s(Z))\left[i\sigma_t - \frac{\partial \sigma_t}{\partial w}\right](Z) + i(e^{iw} - \sigma_t(Z))\left[i\rho_s - \frac{\partial \rho_s}{\partial z}\right](Z)$$

$$- (e^{iz} - \rho_s(Z))\ (e^{iw} - \sigma_t(Z)).$$

Quitte à améliorer à nouveau le choix de ε', C', il existe ε''', ε_6, C_6 tels que

(3.3) $\forall\, Z \in \partial B(Z_1, \varepsilon''' e^{-C''p(Z_o)}),\ |e^{iz} - \rho_{s_1}(Z)| + |e^{iw} - \sigma_{t_1}(Z)| > \varepsilon_6 e^{-C_6 p(Z)}$.

Cela résulte de la méthode déjà utilisée pour prouver la proposition 1.1 de [11]; on utilise

$$|e^{iz_1} - \rho_s(Z_1)| + |e^{iw_1} - \sigma_t(Z_1)| + |J_{s,t}(Z_1)| > \varepsilon_5 e^{-C_5 p(Z_1)}.$$

Puisque A_o et B_o sont dans la famille $\mathcal{C}$, et grâce à (3.2), (3.2') et (3.3), on voit qu'il existe ε_7 et C_7, indépendants de Z_1, tels que

(3.4) $\forall\, Z \in \partial B(Z_1, \varepsilon''' e^{-C''p(Z_o)}),\ |F_1(Z)| + |F_2(Z)| > \varepsilon_7 e^{-C_7 p(Z)}$.

Il suffit donc de choisir $\varepsilon_1 < \varepsilon_7$, $C_1 > C_7$, et le lemme est démontré lorsque les polynômes $\sum_{k=o}^{m} A_k T^{p_k}$ et $\sum_{k'=o}^{n} B_{k'} T^{q_{k'}}$ sont irréductibles dans $K_o[T]$.

Désignons par $\mathfrak{I}$ la classe des couples de fonctions analytiques pour lesquels le lemme vient d'être démontré. Il existe quatre polynômes $(Q_i)_{i=1}^{4}$ de $\mathbb{C}[X,Y]$ tels que

$$(3.5)\qquad \begin{cases} Q_1 F_1 = Q_2 \prod_{\ell_1} (F_{1,\ell_1})^{k_{\ell_1}} \\ Q_3 F_2 = Q_4 \prod_{\ell_2} (F_{2,\ell_2})^{k_{\ell_2}} \end{cases}$$

où tous les couples $(F_{1,\ell_1}, F_{2,\ell_2})$ sont dans $\mathfrak{I}$.

Nous allons donner la démonstration du lemme dans le cas où l'on a

$$(3.5')\qquad \begin{aligned} &Q_1 F_1 = Q_2 F_{1,1}^{k_1} F_{1,2}^{k_2} \\ &(F_{1,1}, F_2) \text{ et } (F_{1,2}, F_2) \in \mathfrak{I} \end{aligned}$$

La démonstration du lemme ne sera que l'itération de cette méthode. Supposons donc (3.5') ; à chacun des couples $(F_{1,1}, F_2)$ et $(F_{1,2}, F_2)$ on sait associer, puisque ce sont des couples de $\mathfrak{I}$, une famille $\mathcal{C}_i$ $(i=1,2)$ de 5 polynômes ; considérons la famille $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$.

Fixons ε et C ; soit Z_o un point de $\mathbb{C}^2$ tel que $|F_1(Z_o)| + |F_2(Z_o)| < \varepsilon_1 e^{-C_1 p(Z$

où, comme précédemment ε_1 et C_1 seront déterminés en fin de démonstration.

Il existe un voisinage connexe compact δ_{Z_o} de Z_o, inclus dans $B(Z_o, \frac{\varepsilon}{2} e^{-Cp(Z_o)})$ tel que

$$(3.6) \quad \forall\, Z \in \partial(\delta_{Z_o}),\ \forall\, P \in \mathcal{C},\ |F_1(Z)|+|F_2(Z)|+|P(Z)| > \varepsilon' e^{-C'p(Z)}$$

où ε' et C' ne dépendent que de ε et C ainsi que de F_1 et F_2.

Soit Z_1 un point de $\partial(\delta_{Z_o})$; les inégalités (3.6) (avec $\varepsilon'/2$ et C') restent valables dans un voisinage de Z_1 de la forme $B(Z_1, \alpha e^{-Ap(Z_o)})$ ou $\alpha < \frac{\varepsilon}{4}$, $A > C$.

Supposons que l'on ait $|F_1(Z_1)|+|F_2(Z_1)| < \frac{\varepsilon'}{2} e^{-C'p(Z_1)}$.

Il existe alors ε_1' , C_1' dépendant de (ε', c') tels que

$$(3.7) \qquad |F_{1,i}(Z_1)| + |F_2(Z_1)| < \varepsilon_1' e^{-C_1' p(Z_1)} \quad (i=1 \text{ ou } i=2).$$

Supposons (3.7) vérifiée pour i=1.

Si ε' et C' sont correctement choisis, puisque $(F_{1,1}, F_2) \in \mathfrak{I}$, il existe un voisinage connexe compact δ_{Z_o, Z_1} de Z_1, inclus dans $B(Z_1, \frac{\alpha}{2} e^{-Ap(Z_o)})$ sur le bord duquel

$$(3.8) \quad |F_{1,1}(Z)| + |F_2(Z)| > \varepsilon_2 e^{-C_2 p(Z)} \ , \ Z \in \partial(\delta_{Z_o, Z_1}) \ . \ ((\varepsilon_2, C_2) \text{ dépendent de } (\varepsilon', C')).$$

Considérons maintenant un point Z_2 de $\partial(\delta_{Z_o, Z_1})$ en lequel

$$(3.9) \qquad |F_{1,2}(Z_2)| + |F_2(Z_2)| < \varepsilon_2 e^{-C_2 p(Z_2)} \ .$$

L'inégalité (3.8) (avec $\varepsilon_2/2$ et C_2) subsiste dans une boule $B(Z_2, \alpha' e^{-A'p(Z_o)})$, $\alpha' < \frac{\alpha}{2}$; si le choix de (ε_2, C_2) est amélioré, il existe un voisinage connexe compact δ_{Z_o, Z_1, Z_2} de Z_2 inclus dans $B(Z_2, \alpha' e^{-A'p(Z_o)})$ sur le bord duquel

(3.10) $$|F_{1,2}(Z)| + |F_2(Z)| > \varepsilon_2 e^{-C_2 p(Z)}, \quad Z \in \partial(\delta_{Z_o,Z_1,Z_2}).$$

Grâce aux inégalités (3.8) et (3.10), nous avons sur $\partial(\delta_{Z_o,Z_1,Z_2})$

(3.11) $$|F_{1,1}^{k_1} F_{1,2}^{k_2}(Z)| + |F_2(Z)| > \varepsilon_3 e^{-C_3 p(Z)}.$$

Grâce aux inégalités (3.6), on a sur $\partial(\delta_{Z_o,Z_1,Z_2})$

(3.12) $|F_1(Z)| + |F_2(Z)| > \varepsilon_4 e^{-C_4 p(Z)}$ (en effet Q_1 et Q_2 sont des éléments de la famille $\mathcal{C}$).

Ainsi donc, on sait associer à tout point Z_1 de $\partial(\delta_{Z_o})$ un connexe compact δ_{Z_o,Z_1} sur le bord duquel on ait l'inégalité (3.8) et dont l'intérieur contient Z_1 ; d'autre part, à tout point du bord de δ_{Z_o,Z_1}, on sait associer un connexe compact δ_{Z_o,Z_1,Z_2} voisinage de ce point, sur le bord duquel on ait l'inégalité (3.12) ; si ε_1 et C_1 sont correctement choisis, la composante connexe contenant Z_o de $\{Z \in \mathbb{C}^2, |F_1(Z)|+|F_2(Z)| < \varepsilon_1 e^{-C_1 p(Z)}\}$ ne peut donc "s'échapper" de $B(Z_o, \varepsilon e^{-Cp(Z_o)})$; le lemme 3.3 est donc démontré ; nous appelerons $\mathfrak{I}'$ la famille des couples vérifiant les hypothèses du lemme 3.3 et nous noterons $\mathfrak{I}'' = \mathfrak{I}' \cup \{(1,1)\}$■

Achevons maintenant la preuve du théorème 1 ; nous pouvons supposer que μ_1 et μ_2 sont deux distributions de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ à support inclus dans $(-\mathbb{N})^2$; grâce au lemme (3.1), nous construisons un couple (G_1,G_2) de $\mathfrak{I}''$ et un couple (P_1, P_2) d'éléments de $\mathbb{C}[X,Y]$ tels que

$$P_i G_i \in \hat{\mu}_1 A_{p_o}(\mathbb{C}^2) + \hat{\mu}_2 A_{p_o}(\mathbb{C}^2) \quad (i=1,2).$$

Soient ε et C deux constantes positives, fixées une fois pour toutes. Considérons une des composantes irréductibles $\{P=0\}$ de la variété algébrique $\{P_1P_2=0\}$; le polynôme P ne peut diviser simultanément $\hat{\mu}_1$ et $\hat{\mu}_2$ puisque, par hypothèses, $\{\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2 = 0\}$ est discret.

Comme P est irréductible, s'il est de plus non affine, il existe trois constantes ε_o, C_o, T_o telles que sur l'ouvert $B(Z_o, \varepsilon_o e^{-C_o p_o(Z_o)})$ (où Z_o est un point de $\{P = 0\}$ tel que $\|Z_o\| > T_o$), (P,w) constitue un système de coordonnées locales, et que $\{w\}$ soit une coordonnée locale sur $\{P=0\}$ dans la boule $B(Z_o, \varepsilon_o e^{-C_o p_o(Z_o)})$; telles aussi que sur le même ouvert (P,z) constitue un système de coordonnées locales et que $\{z\}$ soit une coordonnée locale sur $\{P=0\}$ dans $B(Z_o, \varepsilon_o e^{-C_o p_o(Z)})$.

L'existence de ε_o, C_o, T_o résulte du théorème des zéros de Hilbert et du théorème des fonctions implicites.

Nous fixerons dorénavant le point Z_o tel que $P(Z_o)=0$ et $\|Z_o\| > T$.

Grâce au lemme 3.2 et à la manière dont varient en fonction de z au voisinage de z_o, ou en fonction de w au voisinage de w_o, les racines du polynôme $P(z,w) = 0$ (considéré comme polynôme en z ou en w), il existe un arc $(z(\theta), w(\theta))$ $(\theta \in [0,1])$, fermé, tracé sur la variété $\{P = 0\}$ et inclus dans $B(Z_o, \varepsilon_o e^{-C_o\, p_o(Z_o)})$, et des constantes $\eta_o < \frac{\varepsilon_o}{2}$, $K_o > C_o$, ε_1, C_1, telles que

$$(i)\ |\hat{\mu}_1(z(\theta),w(\theta))|+|\hat{\mu}_2(z(\theta),w(\theta))| > \varepsilon_1\, e^{-C_1\, p_o(z(\theta),w(\theta))}, \theta\in[0,1] ;$$

$$(ii)\ |z(\theta)-z_o| \geq \eta_o\, e^{-K_o\, p_o(Z_o)},\ \theta \in [0,1] ;$$

$$(iii)\ |w(\theta)-w_o| \geq \eta_o\, e^{-K_o p_o(Z_o)},\ \theta \in [0,1].$$

Supposons qu'une composante connexe $\mathcal{C}$ de l'ensemble $\{|\hat{\mu}_1(Z)|+|\hat{\mu}_2(Z)| < \frac{\varepsilon_1}{2} e^{-C_1\, p_o(Z)}\}$ rencontre $\Delta(z_o, \eta_o e^{-K_o\, p_o(Z_o)}) \times \Delta(w_o, \eta_o e^{-K_o p_o(Z_o)})$ et qu'en tout point de $\mathcal{C}$, on ait $|P_i(Z)| < \eta e^{-Kp_o(Z)}$, $i = 1$ ou 2 ; étant donnés η' et K', si η et K sont correctement choisis, on est assuré qu'en tout point $Z \in \mathcal{C} \cap B(Z_o, \varepsilon_o e^{-C_o p_o(Z_o)})$, on a $|P(Z)| < \eta' e^{-K' p_o(Z)}$. Or il existe une paire de constantes α_p et A_p telles que

$$d[(P,w(\theta)),(0,w(\theta))] < \alpha_p\, e^{-A_p p_o(Z_o)} \text{ et } (P,w(\theta)) \in B(Z_o, \varepsilon_o e^{-C_o p_o(Z_o)})$$

$$\Rightarrow |\hat{\mu}_1((P,w(\theta)))|+|\hat{\mu}_2((P,w(\theta))| \geq \frac{\varepsilon_1}{2} e^{-C_1 p_o((P,w(\theta)))}.$$

On peut choisir η' et K' correctement de manière à ce que

$$|P(Z)| < \eta' e^{-K' p_o(Z)} \text{ et } Z \in B(Z_o, \varepsilon_o e^{-C_o p_o(Z_o)})$$

$$\Rightarrow d[(P,w), (0,w)] < \alpha_p e^{-A_p p_o(Z_o)}).$$

Pour des raisons de connexité, la composante connexe $\mathcal{C}$ est en fait incluse dans $\Delta(z_o, \frac{\varepsilon_o}{2} e^{-C_o p_o(Z_o)}) \times \Delta(w_o, \frac{\varepsilon_o}{2} e^{-C_o p_o(Z_o)})$.

En entourant également chaque composante affine $\{Q = 0\}$ de la variété algébrique $\{P_1 P_2 = 0\}$ d'un voisinage tubulaire de la forme $\{|Q| < \lambda e^{-\mu p_o(Z)}\}$, où λ et μ sont correctement choisis, nous voyons qu'il existe trois constantes T_1, η_1, K_1, telles que les composantes connexes posant problème de $\{|\hat{\mu}_1(Z)|+|\hat{\mu}_2(Z)| < \frac{\varepsilon_1}{2} e^{-C_1 p_o(Z)}\}$ soient celles contenant un point Z tel que $\|Z\| \leq T_1$, ou tel que $|P_i(Z)| \geq \eta_1 e^{-K_1 p_o(Z)}$ pour $i = 1$ et $i = 2$.

Supposons qu'une telle composante connexe $\mathcal{C}$ contienne un point Z_o tel que

$$|P_i(Z_o)| \geq \eta_1 e^{-K_1 p_o(Z_o)}, \quad i = 1,2. \tag{3.15}$$

Les inégalités (3.15) subsistent dans un voisinage de Z_o de la forme $B(Z_o, \beta e^{-B p_o(Z_o)})$, où β et B sont liés à η_1, K_1, P_1 et P_2 ; on peut imposer $\beta < \frac{\varepsilon}{2} e^{-C}$ et $B > C$; nous pouvons appliquer le lemme 3.3 au couple (G_1, G_2) ; le choix de ε_1 et de C_1 ayant été amélioré, nous pouvons supposer que $\mathcal{C}$ est incluse dans $B(Z_o, \beta e^{-B p_o(Z_o)})$; Z et Z' étant deux points de $\mathcal{C}$, nous avons

$$\|Z-Z'\| \leq \|Z-Z_o\| + \|Z'-Z_o\| \leq \varepsilon e^{-C[p_o(Z_o)+1]} \leq \varepsilon e^{-C p_o(Z)}.$$

Enfin les composantes connexes $\mathcal{C}$ de $\{|\hat{\mu}_1(Z)|+|\hat{\mu}_2(Z)| < \frac{\varepsilon_1}{2} e^{-C_1 p_o(Z)}\}$ contenant un point Z_o tel que $\|Z_o\| \leq T_1$ ne posent, quant à elles, pas de problèmes, quitte à améliorer encore le choix de ε_1 et de C_1 ■

IV Autres exemples d'application des mêmes méthodes

Les résultats du précédent paragraphe peuvent aussi s'appliquer à l'étude de couples (μ_1, μ_2) de distributions à support fini, non nécessairement inclus dans $\mathbb{Q}^2$.

Proposition 4.1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$; soit $(p_k)_{k=o}^{m}$ une suite strictement décroissante de nombre réels ; soient $(A_o, A_1, \ldots A_m)$ et (B_o, B_1) deux familles finies de polynômes de $\mathbb{C}[X,Y]$ dont les éléments (dans chaque famille) sont premiers entre eux.

On considère les deux exponentielles polynômes de $\mathbb{C}^2$ définies par

$$(4.1)\quad F_1(z,w) = \sum_{k=o}^{m} A_k(z,w)\, e^{ip_k z}\ ,\ F_2(z,w) = B_o(z,w)\, e^{iw} + B_1(z,w).$$

Le couple (F_1, F_2) est "fortement slowly decreasing" relativement au poids p_o .

Nous allons démontrer ce résultat par récurrence sur m.
La proposition est vraie pour m=1 (lemme 3.3) ; supposons la vérifiée pour tout entier m', $m' < m$.

L'idée de la récurrence repose sur la simple remarque suivante : lorsque F_1 et F_2 sont de la forme (4.1), avec $m > 1$, il existe un entier m' dans $\mathbb{N}^*$, une suite $(q_{k'})_{k'=o}^{m'}$ strictement décroissante de réels, une famille $(J_{k'})_{k'=o}^{m'}$ d'éléments de $\mathbb{C}[X,Y]$, et une fonction analytique $\mathcal{U}$ dans $A_{p_o}(\mathbb{C}^2)$ tels que la fonction analytique définie par

$$\mathcal{U}(Z)J[F_1, F_2](Z) - \sum_{k'=o}^{m'} J_{k'}(z,w)\, e^{iq_{k'}z}\ ,\ (z,w) \in \mathbb{C}^2,$$

soit dans $F_1 A_{p_o}(\mathbb{C}^2) + F_2 A_{p_o}(\mathbb{C}^2)$, et que $m' < m$.

Soit R le P G C D des polynômes $(J_{k'})_{k'=o}^{m'}$.

Fixons ε et C positifs et donnons nous un point Z_o de $\mathbb{C}^2$ tel que

$$|F_1(Z_o)| + |F_2(Z_o)| + |J[F_1,F_2](Z_o)| < \varepsilon_1\, e^{-C_1 p(Z_o)}.$$

(ε_1 et C_1 sont pour l'instant fixés arbitrairement).

Le spectre $\{F_1 = F_2 = 0\}$ étant discret (une composante analytique de ce

spectre de dimension 1 doit être algébrique, et l'on peut appliquer le lemme 3.2), nous pouvons, en raisonnant comme au paragraphe 2, construire un connexe compact δ_{Zo} contenant Z_o, inclus dans $B(Z_o, \frac{\varepsilon}{2} e^{-Cp(Z_o)})$, sur le bord duquel

$$|F_1(Z)| + |F_2(Z)| + |R(Z)| > \varepsilon_2 e^{-C_2 p(Z)}, \quad Z \in \partial(\delta_{Z_o}) ;$$

ε_2 et C_2 ne dépendent que de ε et C, ainsi que des fonctions F_1 et F_2.

Plaçons nous en un point Z_1 de

$$\partial(\delta_{Z_o}) \text{ où } |F_1(Z_1)| + |F_2(Z_1)| < \frac{\varepsilon_2}{2} e^{-C_2 p(Z_1)} ;$$

nous avons dans un voisinage de ce point de la forme $B(Z_1, \alpha e^{-Ap(Z_o)})$, inclus dans $B(Z_o, \varepsilon e^{-Cp(Z_o)})$,

$$|R(Z)| > \frac{\varepsilon_2}{4} e^{-C_2 p(Z)} .$$

Posons $G_1(z,w) = \sum_{k'=o}^{m'} J_{k'}(z,w)\, e^{iq_{k'}z}$; grâce à l'hypothèse de récurrence, il existe un connexe compact δ_{Z_o,Z_1}, inclus dans $B(Z_1, \frac{\alpha}{2} e^{-Ap(Z_o)})$ voisinage de Z_1, sur le bord duquel

$$|G_1(z,w)| + |F_2(z,w)| > \varepsilon_3 e^{-C_3 p(Z)}, \quad Z \in \partial(\delta_{Z_o,Z_1}) ,$$

où ε_3 et C_3 sont liés à α et A, ainsi qu'à G_1 et F_2.

Il existe donc (ε_4, C_4) indépendants de Z_o et Z_1, tels que

$$|F_1(z,w)| + |F_2(z,w)| + |J[F_1,F_2](z,w)| > \varepsilon_4 e^{-C_4 p(Z)}, Z \in \partial(\delta_{Z_o,Z_1}) .$$

La proposition résulte alors de la proposition 1.1 de [11]; il suffit de choisir $\varepsilon_1 < \varepsilon_4$, $C_1 > C_4$ pour pouvoir conclure ■

<u>Proposition 4.2</u> <u>Soit</u> $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$; <u>soient</u> μ_1 et μ_2 <u>deux distributions à support compact de la forme</u>

$$(4.2) \qquad \begin{cases} \mu_1 = a_1 \delta_{o,o} + b_1 \delta_{1,o} + c_1 \delta_{o,1} + d_1 \delta_{1,1} + \tau_1 \\ \mu_2 = a_2 \delta_{o,o} + b_2 \delta_{1,o} + c_2 \delta_{o,1} + d_2 \delta_{1,1} + \tau_2 \end{cases}$$

où les nombres complexes a_j, b_j, c_j, d_j (j=1,2) satisfont aux conditions de Delsarte $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \neq 0$, et où τ_1 et τ_2 sont deux distributions à support fini, inclus dans $]0,1[^2 \cap \mathbb{Z}(\alpha,\beta)$.

On suppose que pour tout couple (ρ_1, ρ_2) de $(\mathbb{C}^*)^2$, le spectre du système de distributions $a_j \delta_{o,o} + b_j \rho_1 \delta_{1,o} + c_j \rho_2 \delta_{o,1} + d_j \rho_1 \rho_2 \delta_{1,1} + \tau_j$, (j=1,2) est discret. Le couple $(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2)$ est alors "fortement slowly decreasing" pour le poids p_o.

Il existe quatre distributions θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 telles que

$$\begin{cases} -\hat{\mu}_1(Z)[d_2 e^{-iz}+c_2]+\hat{\mu}_2(Z)[d_1 e^{-iz}+c_1]=(d_1b_2-b_1d_2)\, e^{-2iz}+\hat{\theta}_1(Z)e^{-iz}+\hat{\theta}_2(Z) \\ \hat{\mu}_1(Z)[d_2 e^{-iw}+b_2] - \hat{\mu}_2(Z)[d_1 e^{-iw}+b_1]=(c_1d_2-c_2d_1)e^{-2iw}+\hat{\theta}_3(Z)e^{-iw}+\hat{\theta}_4(Z) \end{cases} \quad (Z\in\mathbb{C}^2$$

où les distributions $(\theta_j)_{j=1}^4$ sont à support fini, portées par $]0,1[^2 \cap \mathbb{Z}(\alpha,\beta)$.

De plus sous les hypothèses de la proposition, pour tout couple (ρ_1, ρ_2) de $(\mathbb{C}^*)^2$, les zéros du système

(4.3) $(d_1b_2-b_1d_2)\rho_1^2\, e^{-2iz}+ \hat{\theta}_1(Z)\rho_1 e^{-iz}+\hat{\theta}_2(Z)=(c_1d_2-c_2d_1)\rho_2^2 e^{-2iw}+$

$+\hat{\theta}_3(Z)\rho_2\, e^{-iw}+\theta_4(Z) = 0$ sont isolés ; si cela n'était pas le cas, et puisque le spectre du système

$a_j \delta_{o,o} + b_j\rho_1 \delta_{1,o} + c_j\rho_2\delta_{o,1}+d_j \rho_1\rho_2\delta_{1,1}+\tau_j$, (j=1,2) est discret, on aurait, sur une variété analytique de points vérifiant (4.3),

(4.4) $(\rho_1 d_2 e^{-iz}+c_2)(d_1\rho_2 e^{-iw}+b_1)-(d_1\rho_1 e^{-iz}+c_1)(d_2\rho_2\, e^{-iw}+b_2) = 0$,

soit encore

(4.5) $\rho_2(c_2d_1-c_1d_2)\, e^{-iw}+\rho_1(b_1d_2-b_2d_1)\, e^{-iz}+ (b_1c_2-b_2c_1) = 0.$

Si $b_1c_2-b_2c_1$ est non nul, la variété analytique définie par (4.5) est irréductible et de Liouville, et les fonctions de $A(\mathbb{C}^2)$, à croissance polynomiale sur la variété, sont les restrictions de polynômes [3] ; si $b_1c_2-b_2c_1 = 0$ cette variété analytique est une union d'hyperplans. Comme

les supports des distributions θ_j sont inclus dans $]0,1[^2$, toute composante irréductible de dimension non nulle de la variété analytique définie par (4.3) est incluse dans une bande logarithmique $\Gamma : |\mathrm{Im}\ Z| \leq K(1+\mathrm{Log}(1+\|Z\|))$; une telle composante irréductible ne peut donc être algébrique, ni même être égale à la variété définie par (4.5) lorsque $b_1c_2-b_2c_1 \neq 0$ (la fonction e^{iz} serait alors à croissance polynomiale sur cette variété, ce qui est absurde, car elle coïnciderait avec un polynôme).

Les zéros communs du système (4.3) sont donc isolés.

En fait, les distributions $(\theta_j)_{j=1}^4$ sont à support dans $\mathbb{Z}(\alpha,\beta)$.

Désignons par $\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)}$ l'anneau des transformées de Fourier des distributions à support fini, portées par $\mathbb{Z}(\alpha,\beta)$.

Posons : $\begin{cases} F_1(Z) = (d_1b_2-b_1d_2)\ e^{-2iz}\ \hat{+}\ \hat{\theta}_1(Z)\ e^{-iz}\ \hat{+}\ \hat{\theta}_2(Z) \\ F_2(Z) = (c_1d_2-c_2d_1)\ e^{-2iw}\ \hat{+}\ \hat{\theta}_3(Z)\ e^{-iw}\ \hat{+}\ \hat{\theta}_4(Z) \end{cases} \quad (Z \in \mathbb{C}^2)$

Il est clair qu'il suffit de montrer que (F_1,F_2) est "fortement slowly decreasing".

En reprenant la démonstration du lemme 3.3, mais en considérant, non plus l'anneau unifère $\mathbb{C}[X,Y]$, mais ce nouvel anneau $\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)}$, nous pouvons associer au couple (F_1,F_2) une famille $\mathcal{C}$ d'éléments de $\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)}$, non nuls.

Soit R un élément de $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}$; nous pouvons donc écrire

$$(4.6)\qquad e^{i(\alpha z+\beta w)\lambda}R(z,w) = \sum_{k=o}^{m_R} R_k(z,w)\ e^{-ip_k(\alpha z+\beta w)}, \quad Z \in \mathbb{C}^2$$

où $(p_k)_{k=o}^{m_R}$ désigne une suite décroissante d'entiers positifs ($p_{m_R}=0$), $(R_k)_{k=o}^{m_R}$ une famille de polynômes de $\mathbb{C}[X,Y]$, λ un élément de $\mathbb{Z}$.

D'après la théorie de l'élimination, et puisque $d_1b_2-b_1d_2 \neq 0$, ainsi que $(c_1d_2-c_2d_1)$, nous pouvons construire deux polynômes $\Delta_{1,R}$, $\Delta_{2,R}$, de $\mathbb{C}[X,Y]$, ainsi qu'un couple $(F_1^{(R)}, F_2^{(R)})$, de la forme indiquée par l'énoncé du lemme 3.3, ou éventuellement de la forme (1,1), tel que

$$(4.7)\qquad \Delta_{j,R}F_j^{(R)} \in F_1\,A_{p_o}(\mathbb{C}^2)+F_2A_{p_o}(\mathbb{C}^2)+R\,A_{p_o}(\mathbb{C}^2)\ (j=1,2).$$

Nous associons donc au couple (F_1,F_2) une variété algébrique V définie par $V = \{ Z \in \mathbb{C}^2, \prod_{j=1,2} \prod_{R\in\mathcal{C}} \Delta_{j,R}(Z) = 0\}$, à laquelle, comme dans la démonstration du théorème 1 (le lemme 3.2 est toujours applicable), nous attachons un voisinage tubulaire $V_{\varepsilon,C}$ construit en fonction de ε et de C intervenant dans la définition de "fortement slowly decreasing"; si ε_1 et C_1 sont correctement choisis, les composantes connexes de l'ensemble $\{|F_1(Z)|+|F_2(Z)|< \varepsilon_1 e^{-C_1 p(Z)}\}$ incluses dans $V_{\varepsilon,C}$ ne posent pas de problème (à cause du lemme 3.2; cf preuve du théorème 1).

Nous devons étudier les composantes connexes de l'ensemble $\{|F_1(Z)|+|F_2(Z)|<\varepsilon_1 e^{-C_1 p(Z)}\}$ rencontrant le complémentaire de ce voisinage tubulaire $V_{\varepsilon,C}$; soit $\mathcal{C}$ une telle composante connexe ; soit Z_o un point de $\mathcal{C}$ n'appartenant pas au voisinage $V_{\varepsilon,C}$.

En utilisant le fait que tous les couples $(F_1^{(R)}, F_2^{(R)})$ sont "fortement slowly decreasing" et le fait que les $\Delta_{j,R}$ $(j=1,2,R\in\mathcal{C})$ sont correctement minorés au point Z_o, nous montrons qu'il existe, à l'intérieur de $B(Z_o, \frac{\varepsilon}{2} e^{-Cp(Z_o)})$, un voisinage connexe compact de Z_o sur la frontière duquel

$$|F_1(Z)| + |F_2(Z)| + |R(Z)| > \varepsilon_2 e^{-C_2 p(Z)}, \quad R \in \mathcal{C},$$

où ε_2 et C_2 sont indépendants du point Z_o.

La méthode de démonstration du lemme 3.3 nous montre que la composante connexe $\mathcal{C}$ est en fait incluse, pourvu que ε_1 et C_1 soient correctement choisis en fonction de ε et C, dans $B(Z_o, \varepsilon e^{-C p(Z_o)})$ ■

Nous pouvons dans un cas particulier, alléger les hypothèses de la proposition 4.2.

<u>Proposition 4.3</u> <u>Soit</u> $(\alpha,\beta) \in]0,1[^2$ <u>soient</u> μ_1 et μ_2 <u>deux distributions à support compact de la forme</u>

$$(4.8)\begin{cases} \mu_1 = a_1\delta_{o,o} + b_1\delta_{1,o} + c_1\delta_{o,1} + d_1\delta_{1,1} + P_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) * \delta_{\alpha,\beta} \\ \mu_2 = a_2\delta_{o,o} + b_2\delta_{1,o} + c_2\delta_{o,1} + d_2\delta_{1,1} + P_2\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) * \delta_{\alpha,\beta} \end{cases}$$

où P_1 et P_2 sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X,Y]$, où les nombres complexes a_j, b_j, c_j, d_j $(j=1,2)$ satisfont aux conditions de Delsarte et à la condition supplémentaire

$$(4.9)\quad \left(\left| \begin{matrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{matrix} \right| \right)^2 + 4 \left| \begin{matrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{matrix} \right| \neq 0 .$$

Alors le spectre de (μ_1,μ_2) est discret et le couple $(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2)$ est "fortement slowly decreasing".

Posons $\widetilde{P}_j(z,w) = P_j(-iz,-iw)$, $j=1,2$, $Z \in \mathbb{C}^2$.

En explicitant les distributions $(\theta_j)_{j=1}^4$ introduites lors de la démonstration de la proposition précédente, nous montrons que l'idéal de $A_{p_o}(\mathbb{C}^2)$ engendré par $\hat{\mu}_1$ et $\hat{\mu}_2$ contient les fonctions analytiques F_1 et F_2, où

$$F_1(z,w)=\delta_2 e^{-2iz} + [e^{-i(\alpha z+\beta w)}(\widetilde{P}_1(Z)d_2-\widetilde{P}_2(Z)d_1)+\delta+\delta']e^{-iz} +$$

$$+(\widetilde{P}_1(Z)c_2-\widetilde{P}_2(Z)c_1)\ e^{-i(\alpha z+\beta w)}-\delta_4$$

$$F_2(z,w)=\delta_3 e^{-2iw} + [e^{-i(\alpha z+\beta w)}(\widetilde{P}_2(Z)d_1-\widetilde{P}_1(Z)d_2)-\delta+\delta']e^{-iw} +$$

$$+(\widetilde{P}_2(Z)b_1-\widetilde{P}_1(Z)b_2)\ e^{-i(\alpha z+\beta w)}-\delta_1$$

avec $\delta_1 = \left| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right|$, $\delta_2 = \left| \begin{matrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{matrix} \right|$, $\delta_3 = \left| \begin{matrix} d_1 & c_1 \\ d_2 & c_2 \end{matrix} \right|$, $\delta_4 = \left| \begin{matrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{matrix} \right|$,

$\delta = \left| \begin{matrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{matrix} \right|$, $\delta' = \left| \begin{matrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{matrix} \right|$.

Il existe quatre éléments C_o, C_1, C_2, C_3 de l'anneau $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}$, non tous identiquement nuls, tels que la fonction analytique définie par

$$J[F_1,F_2](Z) - (C_o\, e^{-iz} + C_1) - (C_2\, e^{-iz} + C_3)e^{-iw} , \quad Z \in \mathbb{C}^2 ,$$

soit dans l'idéal $F_1\, A_{p_o}(\mathbb{C}^2) + F_2\, A_{p_o}(\mathbb{C}^2)$.

Posons $F_1(Z) = \delta_2\, e^{-2iz} + A_1(Z)\, e^{-iz} + A_2(Z)$.

Formons $F_1(Z)\ (C_o + C_2\ e^{-iw})^2$; modulo l'idéal de $A_{p_o}(\mathbb{C}^2)$ engendré par F_1, F_2, et $J[F_1, F_2]$, cette fonction est congrue à la fonction Φ définie par

$$\Phi(Z)=\delta_2(C_1+C_3\ e^{-iw})^2-A_1(C_o+C_2e^{-iw})\ (C_1+C_3e^{-iw})+A_2(C_o+C_2e^{-iw})^2 .$$

Le résultant de Φ et de F_2 (où Φ et F_2 sont considérés comme des polynômes en e^{-iw}) est un élément de $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}$ appartenant à l'idéal de $A_{p_o}(\mathbb{C}^2)$ engendré par F_1, F_2 et $J[F_1,F_2]$. Si l'on substitue, dans l'expression de Φ, 0 à $e^{-i(\alpha z+\beta w)}$, on obtient, au signe près,

$$\Phi_o(Z) = [(\delta'-\delta)e^{-iw} - 2\ \delta_1]^2\ (4\delta_2\delta_4+(\delta+\delta')^2) .$$

De plus $4\ \delta_2\delta_4 + (\delta+\delta')^2 \neq 0$ par hypothèses (4.9). Or le calcul du résultant de $\varphi_1(w) =((\delta'-\delta)e^{-iw}-2\delta_1)^2$ et de $\varphi_2(w)=\delta_3e^{-2iw}+(\delta'-\delta)e^{-iw}-\delta_1$, considérés comme des polynômes du second degré en e^{-iw} (φ_2 correspond à l'expression de F_2 où 0 a été substitué à $e^{-i(\alpha z+\beta w)}$) nous donne

$$\text{Res}\ (\varphi_1,\varphi_2)\ (w)=[4\delta_3\delta_1^2+\delta_1(\delta'-\delta)^2]^2=\delta_1^2[4\delta_3\delta_1+(\delta'-\delta)^2]^2 .$$

Comme $4\delta_3\delta_1+(\delta'-\delta)^2=4\delta_2\delta_4+(\delta+\delta')^2$, on a $\text{Res}\ (\varphi_1,\varphi_2)(w) \neq 0$.

Le résultant de Φ et de F_2, calculé en supposant que Φ et F_2 sont des polynômes de degré 2 en e^{-iw}, à coefficients dans $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}$, est donc un élément non nul de l'anneau $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}$, que nous noterons R ; si R n'est pas un polynôme, nous pouvons trouver deux polynômes $\Delta_{1,R}, \Delta_{2,R}$ de $\mathbb{C}[X,Y]$, ainsi qu'un couple $(F_1^{(R)}, F_2^{(R)})$ de la forme indiquée par l'énoncé du lemme 3.3, ou éventuellement de la forme (1,1) tels que

$$\Delta_{j,R}\ F_j^{(R)} \in F_1\ A_{p_o}(\mathbb{C}^2) + F_2\ A_{p_o}(\mathbb{C}^2)+J[F_1\ F_2]\ A_{p_o}(\mathbb{C}^2) .$$

L'ensemble $\{ F_1^{(R)} = F_2^{(R)} = 0\}$ étant discret, toute composante de dimension égale à 1 de l'ensemble $\{F_1=F_2=0\}$ est algébrique (en effet, sur cette composante, on a $F_1=F_2=J[F_1, F_2] = 0$); or, nous avons vu (preuve

de la proposition 4.2) que l'ensemble $\{F_1=F_2=0\}$ était inclus dans une bande logarithmique Γ de la forme $|\mathrm{Im}Z| \leq K\,(1+\mathrm{Log}(1+\|Z\|))$. Toute composante de dimension 1 de l'ensemble $\{F_1=F_2=0\}$ est donc incluse dans un domaine de la forme

$$|\mathrm{Im}z| < K_1(1+\mathrm{Log}(1+|z|)) \ , \ |\mathrm{Im}w| < K_1(1+\mathrm{Log}(1+|w|)) \ ;$$

une variété algébrique irréductible ne peut être incluse dans un tel domaine (voir la démonstration du lemme 2.1). Le spectre de (μ_1,μ_2) est donc discret puisque les zéros de $\{F_1 = F_2 = 0\}$ sont isolés.

Pour montrer que le couple $(\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2)$ est "fortement slowly decreasing", nous raisonnons à partir de la famille $\mathcal{C}$ d'éléments de $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}$ réduite à l'élément R exactement comme on le faisait dans la démonstration de la proposition 4.2. Nous remarquons que s'il existe ε_2 et C_2 tels qu'en un point Z_o de $\mathbb{C}^2$, on ait

$$(4.10) \qquad |F_1(Z_o)|+|F_2(Z_o)|+|R(Z_o)| > \varepsilon_2\, e^{-C_2 p_o(Z_o)} ,$$

on a alors

$$(4.11) \qquad |\hat{\mu}_1(Z_o)|+|\hat{\mu}_2(Z_o)|+|J[F_1,F_2](Z_o)| > \varepsilon_3 e^{-C_3 p_o(Z_o)}$$

où le couple (ε_3,C_3) est indépendant du point Z_o en lequel (4.10) est vérifiée ; or (4.11) implique l'existence, dans $B(Z_o,\varepsilon\, e^{-Cp_o(Z_o)})$ d'un voisinage connexe compact δ_{Z_o} de Z_o sur le bord duquel

$$(4.12) \qquad |\hat{\mu}_1(Z)|+|\hat{\mu}_2(Z)| > \varepsilon_1\, e^{-C_1 p_o(Z)} \ , \ Z \in \partial(\delta_{Z_o}) \text{, où } \varepsilon_1 \text{ et } C_1 \text{ ne}$$

dépendent que de ε_3, C_3, ε et C, ainsi que des fonctions analytiques $\hat{\mu}_1$ et $\hat{\mu}_2$ ■

Remarque La condition (4.9) est équivalente au fait que le système des deux distributions $(a_j\delta_{o,o}+b_j\delta_{1,o}+c_j\delta_{o,1}+d_j\delta_{1,1})_{j=1,2}$ ait un spectre constitué de deux réseaux distincts de points simples $(z_j+2\pi\mathbb{Z},w_j+2\pi\mathbb{Z})_{j=1,2}$

Proposition 4.4 Soit $\mathbb{P}$ un polygône convexe compact du plan affine non

réduit à un segment ; on suppose que $\mathbb{P} = A_1A_2\ldots A_n$ (par convention $A_{n+1}=A_1$) et que $0 \in \mathring{\mathbb{P}}$; soient μ_1 et μ_2 deux distributions de la forme

$$(4.13)\qquad \begin{cases} \mu_1 = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta_{A_j} + \tau_1 + P_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) * \delta_{o,o} \\ \mu_2 = \sum_{j=1}^{n} b_j \delta_{A_j} + \tau_2 + P_2\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) * \delta_{o,o} \end{cases}$$

où $(\tau_j)_{j=1,2}$ sont deux mesures portées par l'intérieur de $\mathbb{P}$, $(P_j)_{j=1,2}$ deux polynômes de $\mathbb{C}[X,Y]$ de degré total inférieur ou égal à 1, et où les coefficients $(a_j, b_j)_{j=1,2,\ldots n}$ vérifient les conditions de Delsarte

$$(D)\qquad \prod_{j=1} (a_jb_{j+1} - a_{j+1}b_j) \neq 0.$$

Le couple $(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2)$ est "slowly decreasing" au sens de Berenstein-Taylor pour le poids p_o.

Dans ce cas particulier, le spectre de (μ_1,μ_2) est donc discret.

Donnons nous ε, C positifs. Nous allons montrer que, pour toute direction $\vec{u} = \cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j}$ de $\mathbb{R}^2$, il existe un secteur angulaire $S_\alpha(\vec{u})$, de la forme $|x \sin\theta - y\cos\theta| < \alpha(x\cos\theta + y\sin\theta)$, et trois constantes $\varepsilon_1(\vec{u})$, $C_1(\vec{u})$, et $T(\vec{u})$ telles que, si $\mathcal{C}$ désigne l'une des composantes connexes de

$$\{Z, |\tilde{\mu}_1(Z)| + |\tilde{\mu}_2(Z)| < \varepsilon_1(\vec{u})\ e^{-C_1 p_o(Z)}\}$$

rencontrant $\{Z \in \mathbb{C}^2,\ \mathrm{Im}\ Z \in S_\alpha(\vec{u})$ et $\mathrm{Im}\ Z.\ \vec{u} > T(\vec{u})\}$, on ait

$$(4.14)\quad Z \in \mathcal{C} \text{ et } Z' \in \mathcal{C} \Rightarrow d(Z,Z') < \varepsilon\ e^{-Cp_o(Z)}.$$

Pour prouver ce résultat, on peut évidemment se ramener au cas ou $\theta = 0$; deux cas se présentent.

Ou bien il y a un seul point de $\mathbb{P}$ d'abscisse maxima ; ce point est un sommet de $\mathbb{P}$ et les estimations faites dans [1] (preuve du lemme 2) montrent qu'il existe α, ε_1, C_1 et T telles que

$$\mathrm{Im}\ Z \in S_\alpha(\vec{u}) \text{ et } \mathrm{Im}\ z > T \Rightarrow |\hat{\mu}_1(Z)| + |\hat{\mu}_2(Z)| > \varepsilon_1\ e^{-C_1\ p_o(Z)}.$$

Ou bien, il y a deux points de $\mathbb{P}$, disons A_1 et A_2, d'abscisse maxima ; ces points sont des sommets du polygône $\mathbb{P}$; appelons (α_j,β_j) les coordonnées du sommet A_j et formons le jacobien de $\hat{\mu}_1$ et de $\hat{\mu}_2$. Il existe une mesure τ, à support compact, inclus dans le demi plan $x<\alpha_1-\eta$ (où $\eta > 0$) telle que

$$J[\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2](Z)=(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\ (a_1b_2-a_2b_1)\ e^{-i(2\alpha_1 z+(\beta_1+\beta_2)w)}\hat{\tau}(Z),\ Z\in\mathbb{C}^2.$$

Il existe donc α, ε_1, C_1 et T, telles que

$$\text{Im } Z \in S_\alpha(\vec{u}) \text{ et } \text{Im}z > T \Rightarrow |J[\hat{\mu}_1,\ \hat{\mu}_2]\ (Z)| > \varepsilon_1\ e^{-C_1 p_o(Z)}.$$

Remarquons que l'existence de ces constantes n'est plus assurée lorsque l'on impose comme seules conditions aux mesures τ_1 et τ_2 de ne pas charger les côtés du polygône $\mathbb{P}$ (comme par exemple dans [1]).

Nous recouvrons $\mathbb{R}^2$ par un nombre fini de secteurs de la forme $S_\alpha(\vec{u})$; il existe donc une constante T telle que, si ε_1 et C_1 sont correctement choisis, on ait (4.14) dès que la composante connexe $\mathcal{C}$ rencontre le domaine $\{|\text{Im } Z| > T\}$.

Soit E l'ensemble des points de $\mathbb{C}^2$ tels que

$$|\text{Im } Z| \le T \text{ et } |\hat{\mu}_1(Z)| + |\hat{\mu}_2(Z)| \le 1.$$

On considère l'ensemble des couples de fonctions analytiques $(\hat{\mu}_1(Z_o+Z),\ \hat{\mu}_2(Z_o+Z))$, où Z_o est un point de E ; cet ensemble est relativement compact dans $A(\mathbb{C}^2)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact des fonctions et de leurs dérivées. Un couple adhérent est de la forme

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j\rho_j e^{-i(\alpha_j z+\beta_j w)}\hat{\sigma}_1(Z)+Q_1(Z),\ \sum_{j=1}^{n} b_j\rho_j e^{-i(\alpha_j z+\beta_j w)}\hat{\sigma}_2(Z)+Q_2(Z)\Big)$$

où σ_1 et σ_2 sont des mesures portées par l'intérieur du polygône $\mathbb{P}$, Q_1 et Q_2 des polynômes de $\mathbb{C}[X,Y]$ de degré au plus 1, et où les $(\rho_j)_{j=1}^{n}$ sont des éléments de $\mathbb{C}^*$. D'après le raisonnement ci-dessus, les zéros communs

d'un tel couple sont isolés ; en effet, une variété de zéros non isolés serait incluse dans une bande de $\mathbb{C}^2$ de la forme $|\mathrm{Im}Z| \leq T_1$, donc dans le domaine $|Q_1(Z)| < T_2$ (on suppose que l'un des deux polynômes, par exemple Q_1, n'est pas constant) ; elle serait algébrique ([9]), ce qui est absurde. Les zéros communs de tout couple adhérent à l'ensemble des couples de fonctions analytiques $(\hat{\mu}_1(Z_o+Z), \hat{\mu}_2(Z_o+Z))$, où $Z_o \in E$, sont donc isolés ; l'argument de compacité utilisé dans [10] permet d'assurer l'existence de η tel que, pour tout Z_o dans E, il existe un voisinage connexe compact δ_{Z_o} de Z_o, inclus dans $B(Z_o, 1)$ sur le bord duquel

$$|\hat{\mu}_1(Z)| + |\hat{\mu}_2(Z)| \geq \eta \ , \ Z \in \partial(\delta_{Z_o}) \ .$$

Cela achève la preuve de la proposition 4.4 ∎

BIBLIOGRAPHIE

[1] C.A. Berenstein et M.A. Dostal : "a lower estimate for exponential sums", Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 687-691.

[2] C.A. Berenstein et B.A. Taylor :"interpolation problems in $\mathbb{C}^n$ with applications to harmonic analysis", to appear J. Analyse. Math.

[3] J.P. Demailly :"fonctions holomorphes à croissance polynomiale sur la surface d'équation $e^x+e^y = 1$", Bull. Sc. math, 2e série, 103,1979, p. 179-191.

[4] P.A. Griffiths : "variations on a theorem of Abel", Inv. Math. 35 (1976), 321-380.

[5] L. Gruman : "the area of analytic varieties in $\mathbb{C}^N$", Math. Scand. 41.(1977).

[6] D.I. Gurevic : "closed ideals with exponential polynomial generators in rings of entire fonctions of two variables" (Russian), Izv. Akad. Nauk. Armjan. SSR, Ser. Math. 9 (1974), n°6, p 459 - 472, 510.

[7] H.I. Levine et D. Eisenbud : "an algebraic formula for the degree of a C^∞ map germ", Annals of Mathematics, 106 (1977), 19-44.

[8] M. Okada : "une estimation modifiée du type de Bezout pour les applications holomorphes équidimensionnelles entières de $\mathbb{C}^n$", C.R. Acad. Sc. Paris, t.291, serie A (7 juillet 1980).

[9] W. Rudin :"a geometric criterion for Algebraic Varieties", J. of. Mathematics and Mechanics, Vol 17, N° 7 (1968).

[10] A. Yger : "une généralisation d'un théorème de J. Delsarte", Séminaire d'Analyse Harmonique, Orsay 1976-77.

[11] A. Yger : "fonctions définies dans le plan et vérifiant certaines propriétés de moyenne", à paraître Annales de l'Institut Fourier (t 31-1981).

[12] S. Bochner, W.T. Martin : Several complex variables Princeton University press 1948.

C H A P I T R E V

SYSTEMES D'EXPONENTIELLES ET SYNTHESE SPECTRALE

I - INTRODUCTION

Soit p une fonction pluri-sous-harmonique positive dans $\mathbb{C}^n (n \geq 1)$ satisfaisant aux hypothèses classiques de [2] ; le poids p_o défini par $p_o(z) = \|\text{Im } z\| + \text{Log}(1 + \|z\|)$ sera notre modèle de référence.

Utilisant un procédé d'interpolation du type Jacobi déjà mis en oeuvre dans un travail de Delsarte [4], Berenstein et Taylor ont exhibé des conditions suffisantes pour qu'un n-uplet $\vec{F}$ d'éléments de $A_p(\mathbb{C}^n)$ définissant une intersection complète dans $\mathbb{C}^n$ soit tel que l'idéal $\sum_{i=1}^{n} A_p(\mathbb{C}^n)\, F_i$ soit fermé dans $A_p(\mathbb{C}^n)$; ces conditions de nature géométrique ([2], déf. 4.1) sont très fortes et souvent difficiles à vérifier ; comme le remarquent Berenstein et Taylor, elles sont satisfaites pour les exemples (dans $\mathbb{C}^2$) étudiés par Delsarte ([4],[10]) ; elles le sont trivialement lorsque $\vec{F}$ est un vecteur de polynômes de $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$, et ont vérifiées dans [2] lorsque les éléments de $\vec{F}$ sont des transformées de Fourier de mesures à support fini et inclus dans $\mathbb{Q}^n$ (le poids étant le poids p_o).

Dans la suite, étant donnée une distribution à support fini $\mu = \sum_{k=1}^{N} P_k(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}) * \delta_{A_k}$ où les A_k sont des points de $\mathbb{R}^n$, et un caractère $\chi \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^*)$, nous poserons :

$$\chi\mu = \sum_{k=1}^{N} \chi(A_k)\, P_k\, (\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}) * \delta_{A_k} .$$

Le cas des exponentielles-polynômes a été étudié par Gurevic dans [6], dans le cas n=2, lorsque les fréquences sont rationnelles imaginaires pures ; son idée de base est que la restriction d'une exponentielle-polynôme de deux variables à une variété algébrique sur laquelle elle n'est pas identiquement nulle satisfait aux mêmes minorations que celles que peut vérifier dans $\mathbb{C}$ ([5],[8]) une exponentielle polynôme d'une variable ; la généralisation de cette idée (partie II) nous a conduit à envisager le cas où les éléments de $\vec{F}$ sont des distributions à support fini dans $\mathbb{Q}^n$ ou plus généralement dans $\mathbb{R}^n$; lorsque tel est le cas, une condition suffisante pour que le n-uplet $(\hat{\nu}_i)_{i=1,\ldots,n}$ satisfasse aux conditions de la définition 4.1 de [2] est que non seulement les $\hat{\nu}_i$ définissent une variété de dimension 0 , mais que cela soit encore le cas pour tous les $(\widehat{\chi\nu_i})_{i=1,\ldots,n}$ lorsque χ est un élément

de $\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*)$ voisin de l'identité, Γ désignant le sous-groupe de $\mathbb{R}^n$ engendré par les points de $\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Supp}\ \nu_i$. La preuve de ce résultat est l'objet du théorème 1 (partie III). Les méthodes que nous avions développées pour généraliser l'exemple de Delsarte [13] utilisaient un argument de compacité de ce type ; il était facile en effet de montrer que pour un tel couple $(\hat{\mu},\hat{\nu})$ du type de Delsarte, tous les spectres $\{\chi\hat{\mu} = \chi\hat{\nu} = 0\}$, où $\chi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^*)$ étaient des spectres discrets dans $\mathbb{C}^2$.

Si nous revenons au point de vue de l'analyse harmonique, il suffit donc pour que le système $\nu_i * \check{f} = 0$ $i=1,\ldots,n$, où les ν_i sont des distributions à support fini dans $\mathbb{R}^n$, satisfasse aux conditions de la synthèse spectrale (et aux hypothèses du théorème 10.1 de [2]), de s'assurer que les ensembles $\{(\chi\nu_i)\hat{} = 0,\ i=1,\ldots,n\}$ sont discrets lorsque χ est un caractère de $\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*)$ voisin de l'identité. Nous donnons dans la partie IV, dans le cas $n=2$, un exemple simple où les hypothèses d'application du théorème 1 sont aisées à vérifier : celui où les distributions ν_1 et ν_2 sont portées par deux droites sécantes L_1 et L_2 du plan ; seules en effet des propriétés "géométriques" des supports de ν_1 et ν_2 (comme dans cet exemple, dans l'exemple de Delsarte, ou dans celui des distributions à support fini inclus dans $\mathbb{Q}^2$) nous permettent de vérifier de telles hypothèses, en général difficiles à établir.

Dans une cinquième partie, nous verrons enfin comment l'idée de Gurevic, jointe à une idée "d'élimination algébrique" entre les éléments de $\vec{F}$ (lorsque ceux ci sont des exponentielles-polynômes) permet de donner des conditions suffisantes pour que soient encore vérifiées les conditions de Berenstein-Taylor.

Rappelons une définition [15] : un N-uplet $\vec{F}$ de $(A_p(\mathbb{C}^n))^N$ est dit "fortement slowly decreasing" dans $\mathbb{C}^n$ relativement au poids p si et seulement si : $\ll \forall \varepsilon > 0, \forall C > 0, \exists \varepsilon_1 > 0, \exists C_1 > 0$ tels que : si $\mathcal{C}$ est une composante connexe de l'ensemble $\{\|\vec{F}(Z)\| < \varepsilon_1\, e^{-C_1 p(Z)}\}$, et si Z et Z' sont deux points de $\mathcal{C}$, $d(Z,Z') < \varepsilon\, e^{-Cp(Z)} \gg$.

Un n-uplet FSD de $(A_p(\mathbb{C}^n))^n$ est "slowly decreasing" au sens de Berenstein-Taylor (déf. 1.4 de [2]) ; il définit bien évidemment une intersection complète dans $\mathbb{C}^n$.

II - UNE PROPRIETE DES EXPONENTIELLES POLYNOMES DE n VARIABLES

Nous nous proposons, suivant une idée de Gurevic et de C.A. Berenstein, de montrer que la restriction d'une exponentielle polynôme de n variables dans $\mathbb{C}^n$ à une variété algébrique irréductible de dimension 1 (associée à un idéal premier $\mathcal{P}$ de $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$) est soit identiquement nulle, soit "FSD" (en un sens que l'on précisera) relativement au poids $p(z) = \|z\|$ ou au poids p_o lorsque les fréquences intervenant dans l'exponentielle-polynôme sont imaginaires pures.

Prouvons dans un premier temps le lemme algébrique suivant :

Lemme 2.1 : soit $\mathcal{P}$ un idéal premier de $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$ $(n \geq 2)$ de dimension 1, associé à la variété irréductible, de dimension 1, V de $\mathbb{C}^n$; on suppose que V n'est contenue dans aucun hyperplan de $\mathbb{C}^n$; il existe une constante C telle que :

$$(z_1,\ldots,z_n) \in V \quad \text{et} \quad |z_1| > C \Rightarrow \sum_{q=2}^{n} |z_q| \leq C(|z_1|+1)^C .$$

Nous allons démontrer ce lemme par récurrence sur n. Pour $n = 2$, le résultat est trivial ; V est définie dans $\mathbb{C}^2$ par $P(z_1,z_2) = 0$, où P est irréductible dans $\mathbb{C}[X_1,X_2]$ et le lemme est immédiat. Nous supposerons le lemme vrai pour $n'<n$.

Soient $q_1,\ldots,q_\ell$ des générateurs de l'idéal premier $\mathcal{P}$. V est définie comme $\{z \in \mathbb{C}^n , q_1(z) = \ldots = q_\ell(z) = 0\}$.

En raisonnant comme Berenstein ([1], p. 95), nous pouvons trouver de nouvelles coordonnées $(z_1,z'_2,\ldots,z'_n)$ de manière à ce que, dans le nouveau repère, q_1 s'écrive :

$$q_1(z_1,z'_2,\ldots,z'_n) = R(z_1)\, z'^{m_1}_2 + \varphi_1(z_1,z'_2,\ldots,z'_n)$$

où φ_1 est un polynôme en $(z_1,z'_2,\ldots,z'_n)$, de degré inférieur à m_1 en z'_2, et R_1 un polynôme de la seule variable z_1 (le changement de variable peut être supposé réel).

Considérons un point Z_o de V où $R(z_1^o) \geq 1$; la théorie de l'élimination pour les ensembles finis de polynômes ([12], p. 1,2, tomme II) de la variable z'_2 nous montre que la projection de $V \cap B(Z_o,\rho_{Z_o})$ (où ρ_{Z_o} est assez petit) sur le sous-espace $\mathbb{C}^{n-1}$ (par $\pi : (z_1,z'_2,\ldots,z'_n) \to (z_1,z'_3,\ldots,z'_n)$) est définie au voisinage de $(z_1^o,z'_3{}^o,\ldots,z'_n{}^o)$ comme l'ensemble des zéros communs à une famille de polynômes $(q'_1{}^{Z_o},\ldots,q'_{\ell}{}^{Z_o})$ ne dépendant que des q_i $(i=1,\ldots,\ell)$ et de Z_o.

Comme V n'est incluse dans aucun hyperplan de $\mathbb{C}^n$, nous pouvons supposer qu'au voisinage de Z_o, $z'_2,\ldots,z'_n$ s'expriment comme des fonctions holomorphes de z_1 (quitte à supposer $|z_1^o|$ suffisamment grand) ; nous pouvons donc supposer que $(q'_1{}^{Z_o},\ldots,q'_{\ell}{}^{Z_o})$ définissent une variété algébrique irréductible de dimension 1 ; cette variété ne peut être incluse dans un hyperplan (de $\mathbb{C}^{n-1}$) car sinon V le serait. Les différentes variétés algébriques irréductibles de dimension 1 dans $\mathbb{C}^{n-1}$ correspondant aux points de V ou $|z_1^o|$ est suffisamment grand sont à prendre parmi une famille finie (lorsque Z_o varie) ; nous pouvons leur appliquer l'hypothèse de récurrence :

Il existe donc C tel que :

$$|z_1| > C \quad \text{et} \quad (z_1,\ldots,z_n) \in V \Rightarrow \sum_{q=3}^{n} |z'_q| < C(|z_1|+1)^C \quad .$$

Mais on a aussi : $|z'_2| < D(1 + |z_1|)^D$; en revenant aux coordonnées $(z_1,\ldots,z_n)$ nous avons bien démontré le lemme. ∎

Proposition 2.2 : soit F une exponentielle polynôme de n variables à fréquences imaginaires pures dans $\mathbb{C}^n$; soit V une variété algébrique irréductible de dimension 1 (variété d'un idéal premier de dimension 1) ; on suppose que F n'est pas identiquement nulle sur V . Il existe une base de $\mathbb{C}^n$, dans laquelle on notera Z' les coordonnées de Z, telle que :

Pour tout ε positif, pour toute constante C positive, il existe des constantes ε_1, C_1, η, K, T telles que :

$\forall\ Z_o = (z_1^o,\dots,z_n^o) \in V \cap \{\|Z\| \geq T\}$, il existe un arc fermé $\gamma^{Z_o}(\theta)$ $(\theta \in [0,1])$ tracé sur V autour de Z_o avec, pour tout θ dans $[0,1]$: (i) $\eta\, e^{-Kp_o(Z_o)} \leq |z_j'(\theta) - z_j'^{o}| < \varepsilon\, e^{-Cp_o(Z_o)}$ pour $j=1,\dots,n$

$$\text{(ii) } F(z_1'(\theta),\dots,z_n'(\theta)) \geq \varepsilon_1\, e^{-C_1 p_o(Z_o)} .$$

Remarque : dans le cas où les fréquences de F ne sont plus imaginaires pures, le résultat subsiste avec $p(Z) = \|Z\|$ à la place de p_o .

Nous démontrons ce résultat par récurrence sur n ; pour $n=2$, la démonstration a été donnée par Gurevic dans [6] ; ce point nous a été signalé par C.A. Berenstein.

Supposons le résultat démontré à l'ordre $n-1$. Nous pouvons supposer que la variété n'est incluse dans aucun hyperplan de $\mathbb{C}^n$ de la forme $\langle\alpha,Z\rangle + \beta = 0$, où $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{C}$; si tel était le cas nous pourrions appliquer l'hypothèse de récurrence.

Supposons $V = \{Z \in \mathbb{C}^n\ ,\ P_1(Z) = \dots = P_N(Z) = 0\}$ où $P_1,P_2,\dots,P_N$ sont des générateurs de l'idéal premier $\mathcal{P}$ lui appartenant.

Il existe, d'après le théorème des fonctions implicites, des constantes T, ε_o, C_o,η_o,K_o, telles que, si Z_o est un point de V tel que $\|Z_o\| > T$, la variété V puisse être définie dans $B(Z_o,\varepsilon_o\, e^{-C_o p_o(Z_o)})$ sous la forme :

$$z_2 = \varphi_2(z_1),\dots,z_n = \varphi_n(z_1) \quad \text{avec} \quad |\varphi_j'(z_1^o)| > \eta_o\, e^{-K_o p_o(Z_o)}$$

(on utilise ici le fait que V n'est dans aucun hyperplan parallèle aux hyperplans de coordonnées) ; on suppose que $\varphi_2,\dots,\varphi_n$ ont été calculées à partir de $P_1(Z) = \dots = P_{n-1}(Z) = 0$ au voisinage de Z_o .

Posons :

$$F(Z) = \sum_{k=o}^{K} A_k(Z)\, e^{-i\langle\lambda_k,Z\rangle} \quad , \quad \text{où} \quad \lambda_k \in \mathbb{R}^n \ ,$$

et où $A_k \in \mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$; $k=0,\ldots,K$.

Nous formons, comme dans [6],

$$\nabla F = \text{Jacobien}(P_1,\ldots,P_{n-1},F) = \sum_{k=0}^{K} B_k(Z)\, e^{-i\langle\lambda_k,Z\rangle} .$$

Nous pouvons supposer : $\dim(V \cap \{A_k = 0\}) = 0$, $k=0,\ldots,K$; formons $(A_K \nabla F - B_K F)(Z) = \sum C_k\, e^{-i\langle\lambda_k,Z\rangle}$; le nombre de monômes exponentiels intervenant dans l'expression de G est strictement inférieur à celui de F ; si l'un des $A_K B_k - B_K A_k$, pour $k \neq K$ était identiquement nul sur V, on aurait :

$$\exists\lambda \in (\mathbb{R}^n)^* , \exists\gamma \in \mathbb{C}^* , A_K + \gamma A_k\, e^{-i\langle\lambda,Z\rangle} \equiv 0 \text{ sur } V .$$

Après un changement de variable (réel) et le recours au lemme 2.1 nous aurions :

$$V \subset \{Z' \in \mathbb{C}^n , |\mathrm{Im}\, z_1'| \leq R[1 + \mathrm{Log}(1+|z_1'|)\} .$$

Une variété algébrique irréductible étant de Liouville, la variété V serait incluse dans un hyperplan z_1' = constante, ou plus précisément, pour revenir aux coordonnées initiales : $\langle\lambda,Z\rangle$ = constante.

Nous avions supposé que cela n'était pas le cas.
Nous raisonnons alors par récurrence sur le nombre de monômes exponentiels figurant dans l'expression de F, et en remarquant :

$$G(z_1,\varphi_2(z_1),\ldots,\varphi_n(z_1)) = A_K(z_1,\vec{\varphi}(z_1))\, J(z_1,\vec{\varphi}(z_1))\, \frac{d}{dz_1}\,(F(z_1,\vec{\varphi}(z_1))$$

$$-B_K(z_1,\vec{\varphi}(z_1))\, F(z_1,\vec{\varphi}(z_1))$$

(où J désigne le déterminant $\left\| \frac{\partial P_i}{\partial z_j} \right\|_{\substack{i=1,\ldots,n-1 \\ j=2,\ldots,n}}$) ;

nous concluons en utilisant l'idée de la proposition 2 de [15], dans le cas $n = 1$. ■

III - LE THEOREME 1 ; ENONCE ET PREUVE

Nous nous proposons de montrer qu'un système $(\hat{\mu}_1,\ldots,\hat{\mu}_M)$ de distributions à support fini dans $\mathbb{R}^n$ est FSD dans $\mathbb{C}^n$ relativement au poids p_o lorsque ce que l'on pourrait appeler le "spectre compactifié" (cf. partie B [16]) du système $(\hat{\mu}_1,\ldots,\hat{\mu}_M)$ est discret ; l'exemple étudié par Delsarte, généralisé dans [13], lorsque les distributions sont à support fini, est une illustration immédiate de ce phénomène.

Prouvons donc le :

Théorème 1 : Soit Γ un sous groupe de type fini de $\mathbb{R}^n$ et $\mu_1,\ldots,\mu_M$, M distributions à support fini inclus dans Γ ; on suppose qu'il existe ε_o positif tel que :

$$(H)\quad \forall \chi \in \mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*),\ \sup_{x\in \cup \mathrm{supp}(\mu_i)} |\chi(x)-1| < \varepsilon_o \Rightarrow \{(\chi\mu_j)\hat{}(Z) = 0,\ j=1,\ldots,M\}$$

est un ensemble discret.

Le M-uplet $(\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2,\ldots,\hat{\mu}_M)$ est alors FSD relativement au poids p_o ; de plus, lorsque $M = n$, il y a synthèse spectrale pour le système d'équations de convolution (*) $\mu_j * \check{f} = 0$, $j=1,\ldots,n$.

Remarque : comme corollaire de ce théorème, nous retrouvons le fait qu'une transformée de Fourier de distribution à support fini dans $\mathbb{R}$ est FSD dans $\mathbb{C}$ relativement au poids p_o ([5],[2]).

Supposons $\Gamma = \mathbb{Z}\,\alpha_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}\,\alpha_m$; nous pouvons associer à chacune des distributions $\mu_j (j=1,\ldots,M)$ un polynôme Q_j de $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_{n+m}]$ de manière à ce que, les $\hat{\mu}_j$ ayant été éventuellement multipliés par des facteurs exponentiels, on ait :

$$\forall\, Z \in \mathbb{C}^n,\ \hat{\mu}_j(Z) = Q_j(z_1,\ldots,z_n, e^{-i\langle\alpha_1,Z\rangle},\ldots,e^{-i\langle\alpha_m,Z\rangle}) .$$

Considérons dans $\mathbb{C}^{n+m}$ le poids P_o défini par :

$$P_o(z_1,\ldots,z_{n+m}) = \mathrm{Log}(1 + \sum_{q=1}^{n+m} |z_q|) + \sum_{q=1}^{n} |\mathrm{Im}\ z_q| .$$

Nous allons montrer que sous l'hypothèse (H), le M+m-uplet de $A_{P_o}(\mathbb{C}^{n+m})$ défini par $(Q_1,\ldots,Q_M, F_1,\ldots,F_m)$ où :

$$\forall j \in \{1,\ldots,m\},\ F_j(z_1,\ldots,z_{n+m}) = \exp(+i\,\langle\alpha_j,\tilde{Z}\rangle)\ z_{n+j} - 1$$

(avec $\tilde{Z} = (z_1,\ldots,z_n)$)

est FSD dans $\mathbb{C}^{n+m}$ relativement au poids P_o ; le résultat en découlera immédiatement.

L'hypothèse (H) implique : $\exists \varepsilon_o > 0$, $\forall (\rho_1,\ldots,\rho_m) \in (\mathbb{C}^*)^m$,

$(|1-\rho_j| < \varepsilon_o\ ,\ j=1,\ldots,m) \Rightarrow (\{Z \in \mathbb{C}^{n+m}\ ,\ Q_1(Z) = \ldots = Q_j(Z) = \rho_j\, e^{+i\langle\alpha_j,\tilde{Z}\rangle} - z_{n+j} = 0$

$j = 1,\ldots,m\}$ est discret).

Soit V_{Max} la variété algébrique de $\mathbb{C}^{n+m}$ définie par :

$$V_{Max} = \{Z \in \mathbb{C}^{n+m}\ ,\ Q_j(Z) = 0,\ j = 1,\ldots,M\}\ .$$

Nous allons démontrer par récurrence le résultat suivant :

(R) Soit V une variété algébrique de $\mathbb{C}^{n+m}$, de dimension k, incluse dans V_{Max} ; on suppose $V = \{Z \in \mathbb{C}^{n+m}\ ,\ q_j(Z) = 0,\ j=1,\ldots,\ell\}$; soient ε et C deux constantes positives ; il existe $\varepsilon_1(\varepsilon,C,V)$, $C_1(\varepsilon,C,V)$ tels que :

(a) si $\mathcal{C}$ est une composante connexe de $\{Z\in\mathbb{C}^{n+m}, \sum_1^{\ell} |q_j(Z)| + \sum_1^{m} |F_j(Z)| < \varepsilon_1\ e^{-C_1 P_o(Z)}\}$

$= S_V(\varepsilon_1,C_1)$, $\mathcal{C}$ est bornée dans $\mathbb{C}^{n+m}$;

(b) $\mathcal{C}$ étant une composante connexe de $S_V(\varepsilon_1,C_1)$, Z_1 et Z_2 étant deux points de $\mathcal{C}$, on a : $d(Z_1,Z_2) \le \varepsilon \exp(-C\ P_o(Z_1))$.

(R) est trivial dans le cas où $k=0$; nous allons prouver (R) en faisant une récurrence sur k ; le fait que (R) soit vrai pour V_{Max} fournira le théorème ; il est clair que ε_1 et C_1 sont liés non en fait à V, mais également à la famille de polynômes $\{q_j\ ,\ j=1,\ldots,\ell\}$ choisie pour définir V.

Nous allons dans un premier temps montrer qu'il suffit de démontrer le résultat (R) (que nous supposerons vrai jusqu'à l'ordre k-1) lorsque V correspond à un idéal premier $\mathcal{P}$ de $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_{n+m}]$, les polynômes q_j , $j=1,\ldots,\ell$, étant des générateurs de l'idéal $\mathcal{P}$. Considérons sinon les diviseurs premiers $\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2,\ldots,\mathcal{P}_S$ de l'idéal $\mathcal{J}$ associé à V [12] ; à chaque $\mathcal{P}_s$, $s=1,\ldots,S$, correspond une variété algébrique V_s et des polynômes $(q_{s,1},\ldots,q_{s,n_s})$ engendrant $\mathcal{P}_s$ tels que $V_s = \{Z \in \mathbb{C}^{n+m}\ ,\ q_{s,j}(Z) = 0,\ j=1,\ldots,n_s\}$; d'après le théorème des zéros de Hilbert : $\forall \varepsilon_2 > 0$, $\forall C_2 > 0$, $\exists \varepsilon_1 > 0$, $\exists C_1 > 0$, tels que :

$$(1)\quad \sum_{j=1}^{\ell} |q_j(Z)| < \varepsilon_1\, e^{-C_1 P_o(Z)} \Rightarrow \exists\ s \in \{1,\ldots,S\},\ \sum_{j=1}^{n_s} |q_{s,j}(Z)| < \varepsilon_2\, e^{-C_2 P_o(Z)}$$

Supposons en effet que $\forall\ s \in \{1,\ldots,S\}$, $\exists j = j(s)$ tel que $|q_{s,j(s)}(Z)| > \frac{\varepsilon_2}{n_s} e^{-C_2 P_o(Z)}$; le polynôme $\prod_{s\in\{1,\ldots,S\}} q_{s,j(s)}$ est dans le radical de l'idéal engendré par les polynômes $q_1,\ldots,q_\ell$ et l'on conclut grâce à une inégalité de la forme :

$$\Big|\prod_{s\in\{1,\ldots,S\}} q_{s,j(s)}(Z)\Big|^k \le A\, e^{B P_o(Z)} \Big(\sum_{j=1}^{\ell} |q_j(Z)|\Big).$$

Ceci achève la preuve de l'existence de ε_1 et de C_1 de manière à ce que (1) soit satisfaite.

Nous supposons le théorème démontré à la fois lorsque V est une variété algébrique de dimension $k' < k$ (ce qui est le cas, par exemple, pour toutes les variétés $V_s \cap V_{s'}$, où $s \neq s'$, elles aussi incluses dans V_{Max}), et lorsque V est l'une des variétés V_s, $s = 1,\ldots,S$.

Soient ε et C donnés ; soit $\mathcal{C}$ une composante connexe de l'ensemble $S_V(\varepsilon_1', C_1')$ (où, pour l'instant $\varepsilon_1' < \frac{\varepsilon_1}{2}(\varepsilon, C, V_{s_o} \cap V_{s_o'})$, $C_1' > C_1(\varepsilon, C, V_{s_o} \cap V_{s_o'})$,

s_o et s'_o étant deux éléments distincts de S). D'après l'hypothèse de récurrence, soit $\mathcal{C}$ est incluse dans une boule $B(Z_o, \varepsilon\, e^{-C P_o(Z_o)})$, soit alors il existe $Z_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}$ avec :

$$\sum_{j=1}^{n_{s_o}} |q_{s_o,j}(Z_{\mathcal{C}})| + \sum_{j=1}^{n_{s'_o}} |q_{s'_o,j}(Z_{\mathcal{C}})| > \frac{\varepsilon_1}{2}(\varepsilon, C, V_{s'_o} \cap V_{s'_o})\, e^{-C_1(\varepsilon,C,V_{s_o} \cap V_{s'_o}) p(Z_{\mathcal{C}})} \tag{2}$$

L'inégalité (2) reste valable (avec $\frac{\varepsilon_1}{4}(\varepsilon, C, V_{s_o} \cap V_{s'_o})$ au lieu de $\frac{\varepsilon_1}{2}(\varepsilon, C, V_{s_o} \cap V_{s'_o})$) dans une boule $B(Z_{\mathcal{C}}, \alpha \exp(-A P_o(Z_{\mathcal{C}}))$ ($\alpha < \varepsilon$ et $A > C$) ; si nous avions pris le soin de choisir $\varepsilon'_1 < \inf(\frac{\varepsilon_1}{2}(\varepsilon, C, V_{s_o} \cap V_{s'_o}), \frac{\varepsilon_1}{2}(\alpha, A, V_{s_1} \cap V_{s'_1}))$ et

$C'_1 > \sup(C_1(\varepsilon, C, V_{s_o} \cap V_{s'_o}), C_1(\alpha, A, V_{s_1} \cap V_{s'_1}))$, soit $\mathcal{C}$ aurait été incluse dans $B(Z_{\mathcal{C}}, \alpha\, e^{-A P(Z_{\mathcal{C}})})$, soit il aurait existé un point de $\mathcal{C}$ où :

$$\sum_{j=1}^{n_{s_o}} |q_{s_o,j}(Z_{\mathcal{C}})| + \sum_{j=1}^{n_{s'_o}} |q_{s'_o,j}(Z_{\mathcal{C}})| \geq \frac{\varepsilon_1}{4}(\varepsilon, C, V_{s_o} \cap V_{s'_o})\, e^{-C_1(\varepsilon,C,V_{s_o} \cap V_{s'_o}) P_o(Z_{\mathcal{C}})}$$

et

$$\sum_{j=1}^{n_{s_1}} |q_{s_1,j}(Z_{\mathcal{C}})| + \sum_{j=1}^{n_{s'_1}} |q_{s'_1,j}(Z_{\mathcal{C}})| \geq \frac{\varepsilon_1}{2}(\alpha, A, V_{s_1} \cap V_{s'_1})\, e^{-C_1(\alpha,A,V_{s_1} \cap V_{s'_1}) P_o(Z_{\mathcal{C}})}$$

Il résulte de l'itération d'un tel argument l'existence de deux constantes λ et μ telles que, si ε'_1 et C'_1 sont correctement choisis, deux types de situation peuvent se produire pour les composantes connexes de $S_V(\varepsilon''_1, C''_1)$, lorsque $\varepsilon''_1 < \varepsilon'_1$, $C''_1 > C'_1$.

* ou bien $\mathcal{C}$ est bornée et satisfait (a) et (b) pour ε et C.
* ou bien $\exists\, Z_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}$, avec :

$$\forall s,s' \in \{1,\ldots,S\},\ s \neq s',\ \sum_{j=1}^{n_s} |q_{s,j}(Z_{\mathcal{C}})| + \sum_{j=1}^{n_{s'}} |q_{s',j}(Z_{\mathcal{C}})| \geq \lambda\, e^{-\mu P_o(Z_{\mathcal{C}})}$$

Nous nous plaçons dans la seconde situation et nous supposons toujours le théorème démontré pour toutes les variétés V_s, $s \in \{1,\ldots,S\}$.

Considérons deux réels σ et τ de manière à ce que :

(3) $\quad \forall\ Z \in B(Z_{\mathcal{C}}, \sigma\, e^{-\tau P_o(Z_{\mathcal{C}})}),\ \forall s, s' \in \{1,\ldots,S\},\ s \neq s',$

$$\sum_1^{n_s} |q_{s,j}(Z)| + \sum_1^{n_{s'}} |q_{s',j}(Z)| \geq \frac{\lambda}{2}\, e^{-\mu P_o(Z)}.$$

Nous supposerons que ε_1'' et C_1'' ont été choisis de manière à ce que (1) fonctionne avec les couples (ε_1', C_1') et $(\inf(\frac{\lambda}{4}, \varepsilon_1(\sigma,\tau,V_s)_{s=1,\ldots,S}),$ $\sup(\mu, C_1(\sigma,\tau,V_s)_{s=1,\ldots,S})$ en place de (ε_1, C_1) et de (ε_2, C_2). Dans ce cas :

$$\forall\ Z \in B(Z_{\mathcal{C}}, \sigma\, e^{-\tau P_o(Z_{\mathcal{C}})}),\ \exists s(Z) \in \{1,\ldots,S\} \text{ tel que}$$

$$\sum_{j=1}^{n_{s(Z)}} |q_{s,j}(Z)| < \frac{\varepsilon_1}{2}(\sigma,\tau,V_{s(Z)})\, e^{-C_1(\sigma,\tau,V_{s(Z)})P_o(Z)}$$

Grâce à (3), on a en fait : $\forall\ Z \in B(Z_{\mathcal{C}}, \sigma\, e^{-\tau\, P_o(Z_{\mathcal{C}})})$,

$$\sum_{j=1}^{n_{s(Z_{\mathcal{C}})}} |q_{s,j}(Z)| < \frac{\varepsilon_1}{2}(\sigma,\tau,V_{s(Z_{\mathcal{C}})})\, e^{-C_1(\sigma,\tau,V_{s(Z_{\mathcal{C}})})P_o(Z)}$$

Nous pouvons également supposer que ε_1'' et C_1'' ont été choisis de manière à ce que :

$$\varepsilon_1'' < \frac{\varepsilon_1}{2}(\sigma,\tau,V_{s(Z_{\mathcal{C}})}),\ C_1'' > C_1(\sigma,\tau,V_{s(Z_{\mathcal{C}})})$$

Dans ce cas, nous avons :

$$\forall\ Z \in \mathcal{C} \cap B(Z_{\mathcal{C}}, \sigma\, e^{-\tau\, P_o(Z_{\mathcal{C}})}),\ \sum_{j=1}^{n_{s(Z_{\mathcal{C}})}} |q_{s,j}(Z)|$$

$$+ \sum_1^m |F_j(Z)| < \varepsilon_1(\sigma,\tau,V_{s(Z_{\mathcal{C}})}) \times e^{-C_1(\sigma,\tau,V_{s(Z_{\mathcal{C}})})P_o(Z)}$$

Une telle composante connexe $\mathcal{C}$ est alors bornée (d'après le résultat du théorème supposé admis lorsque $V = V_{s_o}$) et incluse dans $B(Z_{\mathcal{C}}, \sigma\, e^{-\tau P_o(Z_{\mathcal{C}})})$; en ayant pris soin de choisir $\sigma < \varepsilon$, $\tau > C$, $\mathcal{C}$ satisferait alors (a) et (b).

Nous pouvons donc nous limiter à démontrer le théorème lorsque $V = V_s$ pour s dans $\{1,\ldots,S\}$. Fixons donc une fois pour toutes un couple (ε,C).

Nous supposerons donc que V correspond à un idéal $\mathcal{P}$ de $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_{n+m}]$ et que les polynômes q_j, $j = 1,\ldots, \ell$ engendrent $\mathcal{P}$; nous supposerons également que (R) a été démontré à l'ordre k', ou $k' < k$.

Désignons par $(\Delta_j)_{j=1,\ldots,\ell'}$ la famille de $(n+m-k)-(n+m-k)$ mineurs de la matrice $\left[\frac{\partial q_j}{\partial z_i}\right]_{\substack{j=1,\ldots,\ell \\ i=1,\ldots,n+m}}$.

La variété algébrique $V' = \{Z \in \mathbb{C}^{n+m},\ \Delta_j(Z) = 0, j = 1,\ldots,\ell'\} \cap V$ est une variété algébrique de dimension $k' < k$ (voir par exemple [3] ou [17], chapitre I, § V).

Choisissons pour l'instant ε_1 et C_1 arbitrairement et considérons une composante connexe $\mathcal{C}$ de l'ensemble

$$\{Z \in \mathbb{C}^{n+m},\ \sum_{j=1}^{\ell} |q_j(Z)| + \sum_{1}^{n} |F_j(Z)| < \varepsilon_1\, e^{-C_1 P_o(Z)}\}.$$

Grâce à l'hypothèse de récurrence, et au raisonnement utilisé en début de démonstration pour montrer comment l'on pouvait se limiter au cas où $V = V_s$, nous pouvons supposer qu'en un point Z_o de cette composante connexe, on a :

$$\sum_{j=1}^{\ell'} |\Delta_j(Z_o)| \geq \eta\, e^{-K P_o(Z_o)}, \text{ avec } \eta = \frac{1}{2}\varepsilon_1(V', C, \varepsilon),\ K = C_1(V', C, \varepsilon).$$

Quitte à réordonner $(z_1,\ldots,z_{n+m})$, nous supposerons :

$$\exists\, Zo \in \mathbb{C}^{n+m},\ Zo \in \mathcal{C},\ \left\|\frac{\partial q_j}{\partial z_i}\right\|_{\substack{i=1,\ldots,n+m-k \\ j=1,\ldots,n+m-k}} (Zo) \geq \frac{\eta}{\ell'}\, e^{-KP_o(Z_o)}.$$

Nous noterons Δ_1 ce dernier déterminant.

Fixons pour l'instant deux constantes η_o et K_o. Grâce à un argument de perturbation reposant sur l'utilisation de la formule de Kronecker, et de l'argument de la proposition 1.1 du chapitre III, nous montrons, quitte à améliorer le choix de ε_1 et de C_1 (en fonction de ε, C, η_o, K_o, V) qu'il existe des constantes η_1, K_1, ne dépendant que de ε, C, V, η, K, telles que :

(i) $$\eta_1 < \frac{\varepsilon}{2} e^{-C}, \quad K_1 > C ;$$

(ii) $$d(Z,Z_o) < \eta_1 e^{-K_1 P_o(Z)} \Rightarrow |\Delta_1(Z)| \geq \frac{\eta}{2\ell'} e^{-KP_o(Z)} ;$$

(iii) $\exists\, Z'_o$ dans la variété algébrique $V_1 = \{q_j(Z) = 0, j = 1,\ldots,n+m-k\}$, tel que $d(Z_o,Z'_o) < \eta_o e^{-K_o P_o(Z'_o)}$;

(iv) $(q_1,\ldots,q_{n+m-k}, z_{n+m-k+1},\ldots,z_{n+m})$ constituent un système de coordonnées locales dans la boule $B(Z'_o)$ de centre Z'_o et de rayon $\eta_1 e^{-K_1 P_o(Z'_o)}$, tandis que $(z_{n+m-k+1},\ldots,z_{n+m})$ sont des coordonnées locales sur V_1 dans cette même boule.

Pour l'instant, nous choisissons η_o et K_o de manière à ce que $\eta_o < \eta_1$, $K_o > K_1$; nous pouvons également faire en sorte que :

$\sum_{j=1}^{n} |F_j(Z'_o)| < \alpha\, e^{-A P_o(Z'_o)}$, où α et A sont pour l'instant arbitraires,

avec $\alpha < \inf(\frac{\varepsilon_o}{2}, \frac{1}{2})$, $\varepsilon_1 < \frac{\alpha}{2}$, $A > C_1$.

Le point Z'_o est un point d'une composante irréductible V'_1 de la variété algébrique V_1 (correspondant à un idéal premier $\mathfrak{P}'$) ; nous pouvons supposer que cette variété V'_1 est incluse dans V, donc dans V_{Max} ; si tel n'était pas le cas, $V'_1 \cap V$ serait une variété algébrique de dimension strictement inférieure à k ; là encore, l'utilisation de l'hypothèse de récurrence nous permettrait de conclure. Pour des raisons de dimension, nous avons $V'_1 \cap B(Z'_o) = V_1 \cap B(Z'_o)$ dès que Dim V'_1 = k, ce que nous supposerons.

Il existe n+m-k fonctions $(\varphi_j)_{j=1}^{n+m-k}$ dans la boule de $\mathbb{C}^k$, $B_1(Z'_o)$, de centre $(z'^{o}_{n+m-k+1},\ldots,z'^{o}_{n+m})$ et de rayon $\eta'_1 e^{-K'_1 P_o(Z'_o)}$ (où η'_1, K'_1 ne dépendent que de η_1, K_1, η et K) telles que :

$Z' \in V'_1 \cap B(Z'_o)$ et $d((z'_{n+m-k+1},\ldots,z'_{n+m}),(z'^{o}_{n+m-k+1},\ldots,z'^{o}_{n+m})] <$

$$< \eta_1' \, e^{-K_1' P_o(Z_o)} \Rightarrow z'_j = \varphi_j(z'_{n+m-k+1},\ldots,z'_{n+m}),\ j = 1,\ldots,n+m-k.$$

Cela résulte simplement du théorème des fonctions implicites.

Dans cette boule $B_1(Z'_o)$ de $\mathbb{C}^k$, considérons les m fonctions holomorphes : $f_j(z_{n+m-k+1},\ldots,z_{n+m}) = F_j(\varphi_1(z_{n+m-k+1},\ldots,z_{n+m}),\ldots,z_{n+m})$.

Grâce à l'hypothèse (H) et au fait que $V'_1 \subset V_{Max}$, l'un des mineurs φ de rang maximal de la matrice $\left[\frac{\partial f_j}{\partial z_i}\right]_{\substack{1\le j\le m \\ n+m-k+1\le i\le n+m}}$ n'est pas identiquement nul dans $B_1(Z'_o)$; la même hypothèse (H) nous permet également de supposer $k \le m$; en effet, si tel n'était pas le cas, d'après le théorème 10 p 160 de [7], la variété :

$$\{f_j(z_{n+m-k+1},\ldots,z_{n+m}) = f_j(z'^{o}_{n+m-k+1},\ldots,z'^{o}_{n+m}),\ j = 1,\ldots,m\}$$

ne serait pas une variété discrète de $B_1(Z'_o)$; or $\forall_j \in \{1,\ldots,m\}$,

$$f_j(\overbrace{z_{n+m-k+1},\ldots,z_{n+m}}^{W}) = f_j(\overbrace{z'^{o}_{n+m-k+1},\ldots,z'^{o}_{n+m}}^{W_o}) \Leftrightarrow \exp(i<\alpha_j,\tilde{Z}(W)>)\frac{z_{n+j}(W)}{f_j(W'_o)+1} - 1 = 0.$$

D'autre part, nous avons fait en sorte que les $f_j(W'_o)$, pour $j = 1,\ldots,m$, soient suffisamment voisins de 0 (voir le choix de α et de A fait précédemment).

Un calcul immédiat nous montre que :
$\forall\ W \in B_1(Z'_o)$, $\Delta_1^r(Z(W))\varphi(W) = \delta(Z(W))$ où δ est un polynôme de $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_{n+m}]$ non identiquement nul sur la variété algébrique V'_1. Il existe donc un polynôme δ de $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_{n+m}]$ et des constantes η_2, K_2 ne dépendant que de $\{\varepsilon, C, V, \eta, K\}$ telles que :

$$\dim(V'_1 \cap \{\delta = 0\}) < k$$

$$|\delta(Z'_o)| \le |\varphi(Z'_o)| \, \frac{1}{\eta_2} \, e^{K_2 P_o(Z'_o)}.$$

Nous pouvons supposer qu'au point Z'_o, $|\delta(Z'_o)| \ge \eta_3 \, e^{-K_3 P_o(Z'_o)}$; sinon, si η_o et K_o ont été correctement choisis, une inégalité de la forme $|\delta| < 2\eta_3 \, e^{-K_3 P_o}$ a lieu au point Z_o et l'on pourrait utiliser l'hypothèse de récurrence (appliquée à la variété algébrique $V'_1 \cap \{\delta = 0\}$) et le

raisonnement fait en début de démonstration pour conclure.

Sur le bord d'une boule $\gamma_{Z'_o}$ de $\mathbb{C}^k$ de centre $(z'^{o}_{n+m-k+1},\ldots,z'^{o}_{n+m})$ et de rayon $\eta_4\, e^{-K_4 P_o(Z'_o)}$ (où η_4 ne dépend que de ε, C, V, η, K, η_3, K_3, avec $\eta_4 < \eta'_1$, $K_4 > K'_1$, et des distributions μ_j), nous avons une inégalité de la forme :

$$\sum_{j=1}^{m} \left| f_j(z_{n+m-k+1},\ldots,z_{n+m}) - f_j(z'^{o}_{n+m-k+1},\ldots,z'^{o}_{n+m}) \right| \geq \eta_5\, e^{-K_5 P_o(Z'_o)} ;$$

cela résulte de ce que le Jacobien φ est correctement minoré au point $(z'^{o}_{n+m-k+1},\ldots,z'^{o}_{n+m})$.

Quitte à améliorer le choix de η_o et de K_o, et donc celui de ε_1 et de C_1, nous pouvons assurer :

$$\sum_{j=1}^{m} \left| f_j(z'^{o}_{n+m-k+1},\ldots,z'^{o}_{n+m}) \right| < \frac{\eta_5}{2}\, e^{-K_5 P_o(Z'_o)} ;$$ il suffit pour cela de choisir $\alpha = \frac{\eta_5}{2}$, $A = K_5$.

Fixons $\eta_6 > 0$, $K_6 > 0$; soit $E(Z'_o, \eta_6, K_6)$ l'ensemble des points Z de $B_{Z'_o}$ tels que :

$$(z_{n+m-k+1},\ldots,z_{n+m}) \in \gamma_{Z'_o} ;$$

$$\sum_{j=1}^{n+m-k} \left| q_j(Z) \right| < \eta_6\, e^{-K_6 P_o(Z'_o)} .$$

Si η_6 et K_6 sont correctement choisis, on a :

1) $E(Z'_o; \eta_6, K_6) \subset \overset{o}{B}(Z'_o)$;

2) $\forall\, Z \in \partial(E(Z'_o; \eta_6, K_6))$, ou bien $\sum_{j=1}^{n+m-k} \left| q_j(Z) \right| \geq \eta_6\, e^{-K_6 P_o(Z'_o)}$, ou bien $\sum_{j=1}^{m} \left| F_j(Z) \right| \geq \frac{\eta_5}{4}\, e^{-K_5 P_o(Z'_o)}$.

Si ε_1 et C_1 sont correctement choisis, on constate que le point Z'_o est tel que $Z'_o \in \{q_j = 0,\ j = 1,\ldots,n+m-k\}$ et que $Z_o \in E(Z'_o ; \eta_6, K_6)$.

La composante connexe $\mathcal{C}$ doit "s'échapper" de $E(Z'_o; \eta_6, K_6)$ si

elle sort de $B(Z_o, \varepsilon\, e^{-C\, P_o(Z_o)})$; ceci est impossible et $\mathcal{C}$ satisfait donc (a) et (b), ce qui achève la preuve du théorème. ■

IV - UN EXEMPLE D'APPLICATION DU THEOREME 1

Une conséquence facile du théorème 1 est le fait que tout couple $(\hat{\nu}_1,\hat{\nu}_2)$ de transformées de Fourier de distributions de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$, à support fini inclus dans $\mathbb{Q}^2$, est FSD dès que le spectre $\{\hat{\nu}_1=\hat{\nu}_2=0\}$ est discret.

Nous donnons ici une autre application de ce théorème aux couples $(\hat{\nu}_1,\hat{\nu}_2)$ de transformées de Fourier de distributions de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$, à support fini, le support de ν_i étant inclus dans une droite affine L_i de $\mathbb{R}^2$ $(i=1,2)$.

Démontrons dans un premier temps la :

Proposition 4.1 : soient m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$; soient $(p_o,\ldots,p_n)$ et $(q_o,\ldots,q_n)$ deux suites strictement décroissantes de réels ; soient $(A_o,\ldots,A_m)$ et $(B_o,\ldots,B_n)$ deux familles finies de polynômes de $\mathbb{C}[X,Y]$ dont les éléments (dans chaque famille) sont premiers entre eux.

L'ensemble des couples (z,w) de $\mathbb{C}^2$ tels que :

$$\begin{cases} F_1(z,w) = \sum_{k=o}^{m} A_k(z,w)\, e^{ip_k z} = 0 \\ F_2(z,w) = \sum_{k'=o}^{n} B_{k'}(z,w)\, e^{iq_{k'} w} = 0 \end{cases}$$

est un ensemble discret.

Posons $F_1(Z) = \sum_{m_1=o}^{M_1} \tilde{A}_{m_1}(z)\, w^{m_1}$, $F_2(Z) = \sum_{m_2=o}^{M_2} \tilde{B}_{m_2}(w)\, z^{m_2}$.

Supposons que f soit un élément de $A(\mathbb{C}^2)$ divisant F_1 et F_2 ; nous désignerons par V l'ensemble $\{f(z,w) = 0\}$.

Soit π la projection de V sur $\mathbb{C}$: $\pi(z,w) = z$; si S désigne $\{z \in \mathbb{C},\ \tilde{A}_{M_1}(z) = 0\}$, $\pi^{-1}(z)$ est constitué, pour tout z dans $\mathbb{C} \setminus S$ d'au plus $m(z)$ points $(z,\alpha_1(z)),\ldots,(z,\alpha_{m(z)}(z))$, avec $m(z) \leq M_1$ (car $V \subset \{F_1 = 0\}$) ; de plus, si $z \in \mathbb{C}\setminus S$,

$$\exists \rho(z) > 0,\ \exists \tau(z) > 0 \text{ t.q. } |z'-z| < \rho(z) \text{ et } (z',w') \in V \Rightarrow |w'| < \tau(z).$$

On déduit de cela (comme Rudin dans [11], p. 674) que $m(z)$ est constant dans $\mathbb{C}\setminus S$ et que les fonctions symétriques $\sigma_1,\ldots,\sigma_m$ des racines α_j sont holomorphes dans $\mathbb{C}\setminus S$ (on peut supposer $m \neq 0$, car sinon l'ensemble $\{F_1 = F_2 = 0\}$ contiendrait, à moins que f ne s'annule pas, ce que nous excluons, une variété algébrique $z=z_o$; nous verrons en fin de démonstration pourquoi ceci est impossible) ; les fonctions σ_j , $j=1,\ldots,m$, sont en fait méromorphes dans $\mathbb{C}$, de pôles éventuels les éléments de S(voir par exemple [9], pp. 1.9 p.19, remarque 1.3 p. 26).

En dehors de l'ensemble $\{|\tilde{A}_{M_1}(z)| < \varepsilon_1\, e^{-C_1 p_o(z)}\}$ (constitué de composantes connexes bornées puisque $\tilde{A}_{M_1}$ est une exponentielle polynôme FSD), les fonctions σ_j vérifient l'estimation :

$$|\tilde{A}_{M_1}(z)| \geq \varepsilon_1\, e^{-C_1 p_o(z)} \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} |\sigma_j(z)| \leq C\, e^{C p_o(z)}$$

Posons $B_o(z,w) = \sum_{o}^{q_o} w^q\, b_{o,q}(z)$,

$$B_{k'}(z,w) = \sum_{o}^{q_{k'}} w^q\, b_{k',q}(z) \quad .$$

Les fonctions σ_j sont en fait holomorphes en tout point z où $\tilde{A}_{M_1}(z) = 0$ et où $b_{o,q_o}(z)\, b_{k',q_{k'}}(z) \neq 0$; il existe en effet, pour un tel point z, deux réels positifs $\rho(z)$ et $\sigma(z)$ tels que :

$$(*) \quad |z'-z| < \rho(z) \text{ et } (z',w') \in V \Rightarrow |\operatorname{Im} w'| < \tau(z)(1+\operatorname{Log}(1+|\operatorname{Re} w'|)) .$$

Cela résulte de ce que $V \subset \{F_2 = 0\}$. Grâce au théorème de Puiseux ([9]), et à la condition (*), les fonctions α_j , $j=1,\dots,m$, sont bornées au voisinage de z, ce qui implique l'holomorphie des fonctions σ_j au voisinage de z ; nous supposerons en effet que $f(z,.)$ n'est pas identiquement nulle, ce qui implique $\operatorname{card}\{w ; f(z,w) = 0\} \leq M_1$; nous pouvons donc là encore raisonner comme Rudin dans [11].

Soient $z_1,\dots,z_K$ les zéros de $A_{M_1}(z)$ tels que $b_{o,q_o}(z) \cdot b_{k',q_{k'}}(z) = 0$; il y a un nombre fini de tels points ; pour chaque $i=1,\dots,K$, posons :

$$r_i = \max_{j=1,\dots,m} (\text{ordre de } z_i \text{ comme pôle de } \sigma_j) .$$

Soit $P(z) = \prod_1^k (z-z_i)^{r_i}$.

La fonction $\Phi(z,w) = P(z)\left(w^m + \sum_o^{m-1} (-1)^j \sigma_{m-j}(z)\, w^j\right)$, est holomorphe dans $\mathbb{C}^2$; en vertu du principe du maximum appliqué dans les composantes connexes de $\{|A_{M_1}(z)| < \varepsilon_1 e^{-C_1 p_o(z)}\}$, la fonction Φ est même dans $A_{p_o}(\mathbb{C}^2)$.

Comme $f(z,.)$ et $\Phi(z,.)$ ne sont pas identiquement nulles (si z est fixé), nous voyons grâce au théorème de préparation de Weierstrass, qu'il existe une fonction h dans $A(\mathbb{C}^2)$, ne s'annulant pas, telle que

$$f(z,w) = h(z,w)\, \Phi(z,w), \quad \forall Z \in \mathbb{C}^2 .$$

En raisonnant de la même manière avec la variable w, nous voyons qu'il existe des fonctions $\tau_o,\ldots,\tau_m$, de w, holomorphes, et une fonction h' de $A(\mathbb{C}^2)$ ne s'annulant pas telle que :

$$f(z,w) = h'(z,w)\ [\tau_o(w)\ z^{m'} + \sum_{o}^{m'-1} (-1)^{j'}\ \tau_{m'-j'}(w)\ z^{j'}]\ ;$$

les fonctions τ_q sont même dans $A_{p_o}(\mathbb{C})$.

La fonction entière h/h' est donc le quotient de deux éléments de $A_{p_o}(\mathbb{C}^2)$; il existe donc $R>0$ tel que :

$$|h/h'(Z)| \leq R\ e^{R\|Z\|}\ ,\ Z \in \mathbb{C}^2\ .$$

Comme h/h' ne s'annule pas, on a $h(Z) = h'(Z)\ e^{(\alpha z+\beta w+\gamma)}$ avec $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}$.

Mais alors, nous avons :

$$e^{-\alpha z-\gamma}\ \Phi(z,w) = e^{-\beta w}(\tau_o(w)\ z^{m'} + \sum_{o}^{m'-1} (-1)^{j'}\ \tau_{m-j'}(w)\ z^{j'})\ .$$

Le premier membre est un polynôme en w, le second un polynôme en z ; la variété V est en fait algébrique ; on peut la supposer irréductible ; or la restriction de F_1 à V ne peut être identiquement nulle que si V est de la forme $z=z_o$; la restriction de F_1 à V ne peut être nulle que si V est de la forme $w=w_o$ ([6]) ; il y a donc contradiction ; F_1 et F_2 ne peuvent avoir de diviseur commun dans $A(\mathbb{C}^2)$ (mis à part les éléments inversibles de $A(\mathbb{C}^2)$).

Nous concluons grâce à la proposition B.13 ([7], Chap. VIII) ; la variété analytique $\{F_1 = F_2 = 0\}$ est de dimension nulle. ∎

Corollaire 4.2 : soient ν_1 et ν_2 deux distributions à support fini dans $\mathbb{R}^2$; on suppose supp $\nu_i \subset L_i$, i=1,2, où L_1 et L_2 sont deux droites sécantes de $\mathbb{R}^2$. Alors :

1) toute variété analytique de dimension pure égale à 1 incluse dans $\{Z \in \mathbb{C}^2,\ \hat{\nu}_1(Z) = \hat{\nu}_2(Z) = 0\}$ est algébrique.

2) si $\{Z \in \mathbb{C}^2,\ \hat{\nu}_1(Z) = \hat{\nu}_2(Z) = 0\}$ est discret, le couple $(\hat{\nu}_1, \hat{\nu}_2)$ est FSD relativement au poids p_o .

Nous pouvons supposer que L_1 et L_2 sont les axes de coordonnées ; le premier point résulte immédiatement de la démonstration de la proposition ; prouvons donc (2).

D'après la proposition 4.1 et le théorème 1, (2) est vérifiée lorsque $(\hat{\nu}_1, \hat{\nu}_2)$ appartient à l'ensemble $\mathfrak{F}$ des couples de fonctions analytiques décrits dans l'énoncé de la proposition.

Si $(\hat{\nu}_1, \hat{\nu}_2)$ n'appartient pas à $\mathfrak{F}$, il existe en tout cas un couple de $\mathfrak{F} \cup \{(1,1)\}$, que nous noterons (F_1, F_2), et un couple (Δ_1, Δ_2) de polynômes de $\mathbb{C}[X,Y]$, tels que :

$$\hat{\nu}_i = \Delta_i F_i \qquad i=1,2 \quad .$$

Nous utilisons le fait que (F_1, F_2) est FSD ainsi que le fait que la restriction d'une exponentielle polynôme à une variété algébrique irréductible de dimension 1 sur laquelle elle n'est pas identiquement nulle est FSD (cf. pp. 2.2) ; la méthode est décrite dans la preuve de la proposition 5.1. ∎

Corollaire 4.3 : Soient ν_1 et ν_2 deux distributions à support fini dans $\mathbb{R}^2$; on suppose supp $\nu_i \subset L_i$, i=1,2, où L_1 et L_2 sont deux droites sécantes du plan. Les solutions élémentaires du système d'équations de convolution (*) $\nu_i * \check{f} = 0$ forment une partie totale dans l'espace des solutions C^∞ de ce système (pour la topologie de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$).

Grâce au théorème de Hahn Banach, il suffit de démontrer que si $H \in A_{p_o}(\mathbb{C}^2) \cap (\hat{\nu}_1 A(\mathbb{C}^2) + \hat{\nu}_2 A(\mathbb{C}^2))$, alors $H \in \hat{\nu}_1 A_{p_o}(\mathbb{C}^2) + \hat{\nu}_2 A_{p_o}(\mathbb{C}^2)$.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.3.1 : Soit (F_1,F_2) un couple d'éléments de $A_{p_o}(\mathbb{C}^2)$ FSD relativement au poids p_o ; soient H_1 et H_2 deux exponentielles polynômes à fréquences imaginaires pures divisant respectivement F_1 et F_2 dans $A_{p_o}(\mathbb{C}^2)$; le couple $(F_1/H_1 , F_2/H_2)$ est un couple de $A_{p_o}(\mathbb{C}^2)$ FSD relativement au poids p_o .

Les éléments F_1/H_1 et F_2/H_2 sont dans $A_{p_o}(\mathbb{C}^2)$ (voir [8], ou par exemple le théorème 7.2 de [2] ; H_1 et H_2 pourraient être des éléments de $A_{p_o}(\mathbb{C}^2)$ "slowly decreasing" au sens de Berenstein-Taylor par rapport à une famille de droites de $\mathbb{C}^2$). On peut donc écrire :

$$F_1 = E_1H_1 , \quad F_2 = E_2H_2 .$$

Il existe donc $A>0$, $B>0$, tels que :

$$\forall Z \in \mathbb{C}^2, \quad |F_1(Z)| + |F_2(Z)| < A(|E_1(Z)| + |E_2(Z)|)\, e^{Bp_o(Z)} \quad \blacktriangleleft$$

Après un éventuel changement de coordonnées, nous pouvons supposer que le couple $(\hat{\nu}_1,\hat{\nu}_2)$ est un couple de la forme :

$(\Delta_1G_1 , \Delta_2G_2)$ où Δ_1 et Δ_2 sont des éléments de $\mathbb{C}[X,Y]$ et où (G_1,G_2) est un élément de $\mathfrak{F} \cup \{(1,1)\}$ (voir preuve du corollaire 4.2).

Soit H un élément de $A_{p_o}(\mathbb{C}^2) \cap [\hat{\nu}_1 A(\mathbb{C}^2) + \hat{\nu}_2 A(\mathbb{C}^2)]$; soit Δ le PGCD de Δ_1 et de Δ_2 ; on pose $\Delta_i = \Delta\Delta_i'$, $i=1,2$.

Comme Δ divise H dans $A_{p_o}(\mathbb{C}^2)$ (car la division a lieu dans $A(\mathbb{C}^2)$ et Δ est un polynôme), on peut supposer que Δ_1 et Δ_2 sont premiers entre eux.

Nous pouvons écrire $\Delta_1(Z) = \left(\prod_{j=1}^{M_1} (w-w_j)^{q_j^{(1)}} \right) \Delta_1'(Z)$, où Δ_1' ne contient aucun facteur de la forme $w-w_o$; de même : $\Delta_2(Z) = \prod_{j=1}^{M_2} (z-z_j)^{q_j^{(2)}} \Delta_2'(Z)$, où Δ_2' ne contient aucun facteur de la forme $z-z_o$.

De même $G_2(Z) = (\prod_{j=1}^{M_1} (w-w_j)^{k_j^{(2)}}) \tilde{G}_2(Z)$ avec $\tilde{G}_2(.,w_j) \not\equiv 0$, $j=1,\ldots,M_1$, et également $\tilde{G}_1(Z) = \prod_{j=1}^{M_2} (z-z_j)^{k_j^{(1)}} \tilde{G}_1(Z)$ avec $G_1(z_j,.) \not\equiv 0$, $j=1,\ldots,M_2$.

Les fonctions $\tilde{G}_1$ et $\tilde{G}_2$ ne sont bien sûr plus des exponentielles polynômes ; cependant, si nous posons $r_j = \min(q_j^{(1)}, k_j^{(2)})$, $j=1,\ldots,M_1$, et $s_j = \min(q_j^{(2)}, k_j^{(1)})$, les deux éléments de $A_{p_o}(\mathbb{C}^2)$:

$$\left(\Delta_1' \tilde{G}_1 \prod_{j=1}^{M_1} (w-w_j)^{q_j^{(1)}-r_j} \prod_{j=1}^{M_2} (z-z_j)^{k_j^{(1)}-s_j}, \Delta_2' \tilde{G}_2 \prod_{j=1}^{M_1} (w-w_j)^{k_j^{(2)}-r_j} \prod_{j=1}^{M_2} (z-z_j)^{q_j^{(2)}-s_j} \right)$$

forment un couple FSD relativement au poids p_o .

Appelons ces deux fonctions Φ_1 et Φ_2 ; les seules composantes connexes de $\{ |\Phi_1|+|\Phi_2| < \varepsilon_1 e^{-C_1 p_o(.)} \}$ à étudier sont celles qui rencontrent un des ensembles $|z-z_j| < \eta e^{-Kp_o(Z)}$, $j=1,\ldots,M_2$, ou $|w-w_j| < \eta e^{-Kp_o(Z)}$, $j=1,\ldots,M_1$; lorsque cela ne se produit pas, on utilise le lemme et le fait que Φ_1 et Φ_2 divisent respectivement $\Delta_1 G_1$ et $\Delta_2 G_2$.

Supposons que $r_1 = q_1^1 \neq 0$; la fonction $G_1(.,w_1)$ est une exponentielle polynôme FSD, comme fonction d'une variable z, car non identiquement nulle ; grâce au lemme, il en est de même pour $\tilde{G}_1(.,w_1)$,

donc pour $\tilde{G}_1(.,w_1) \prod_{j=1}^{M_2} (z-z_j)^{k_j^{(1)}-s_j}$. A tout point (z_o,w_1) de la variété $w = w_1$, nous pouvons donc associer un polydisque $\delta(z_o,w_1)$ contenant une boule $B((z_o,w_1), \eta_1 e^{-K_1 p_o(z_o,w_1)})$ sur le bord duquel :

$$|w-w_1| + |\Phi_1(Z)| \geq \eta_1' e^{-K_1' p_o(z_o,w_1)}$$ (pourvu que $\|(z_o,w_1)\|$ soit suffisamment grand) ; nous raisonnons de manière identique si $r_1=k_1^{(2)} \neq 0$.

Le cas des composantes connexes de $\{|\Phi_1|+|\Phi_2| < \varepsilon_1 e^{-C_1 p_o(.)}\}$ rencontrant un voisinage tubulaire de l'une des variétés affines $z=z_j$ ou $w=w_j$ se trouve ainsi résolu. ■

V - AUTRES CONDITIONS SUFFISANTES POUR QU'UN M-UPLET SOIT FSD

Nous donnons ici un corollaire de la proposition 2.2. ; les méthodes sont celles de la preuve du théorème 1.

Proposition 5.1 : soient $P_1,\ldots,P_N$ des polynômes de $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$ tels que la variété algébrique de $\mathbb{C}^n$ définie comme $\{Z \in \mathbb{C}^n, P_i(Z)=0,\ i=1,\ldots,N\}$ soit de dimension pure égale à 1. Soit F une exponentielle polynôme de n variables à fréquences complexes (resp. imaginaires pures) telle que $\dim\{P_1=\ldots=P_N=F=0\} = 0$. La famille $(P_1,\ldots,P_N,F)$ est alors FSD relativement au poids $p(Z) = \|Z\|$ (resp. $p_o(Z)$) dans $\mathbb{C}^n$.

Nous raisonnons dans le cas où les fréquences de F sont imaginaires pures ; exactement de la même manière que dans la preuve du théorème 1 (III), nous pouvons supposer que $P_1,\ldots,P_N$ sont les générateurs d'un idéal premier $\mathcal{P}$ de dimension 1 de $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$.

Soit $V = \{Z \in \mathbb{C}^n,\ P_1(Z) = \ldots = P_N(Z) = 0\}$.

Grâce au théorème des fonctions implicites et à la proposition 4.2, il existe $\eta_1,K_1,\eta_2,K_2,\eta_3,K_3,\eta_4,K_4,T$, constantes positives telles que, pour tout Z_o de V tel que $\|Z_o\| > T$:

(a) quitte à permuter les indices, $(z_1, P_1, \ldots, P_{n-1})$ sont des coordonnées locales dans $B(Z_o, \eta_1 e^{-K_1 p_o(Z_o)}) = B_{Z_o}(\eta_1, K_1)$, (z_1) une coordonnée locale sur V.

(b) il existe un voisinage connexe compact γ_{Z_o} de z_1^o tel que

$$B_{Z_o}(\eta_3, K_3) \subset E_{Z_o}(\eta_2, K_2) = \left\{ Z \in B_{Z_o}(\eta_1, K_1), z_1 \in \gamma_{Z_o}, \sum_{q=1}^{n-1} |P_q(Z)| < \eta_2 e^{-K_2 p_o(Z_o)} \right\} \subset$$

$$\subset B^o_{Z_o}(\eta_1, K_1)$$

(c) $\forall\, Z \in \partial E_{Z_o}(\eta_2, K_2)$, $|F(Z)| + \sum_{q=1}^{n-1} |P_q(Z)| \geq \eta_4 e^{-C_4 p_o(Z_o)}$.

D'autre part, si ε et C sont fixés, on peut choisir $\eta_1 < \varepsilon e^{-C}, K_1 > K$.

Prenons $\varepsilon_1 < \varepsilon_4 e^{-C}, C_1 > C_4$ et considérons une composante connexe $\mathcal{C}$ de l'ensemble :

$$\left\{ Z \in \mathbb{C}^n,\ |F(Z)| + \sum_{q=1}^{N} |P_q(Z)| < \varepsilon_1 e^{-C_1 p_o(Z)} \right\} .$$

Nous pouvons supposer que Z_o est un point de $\mathcal{C}$ de module suffisamment grand de manière (par exemple) à ce que :

$$\left\| \frac{\partial P_i}{\partial z_j} \right\|_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ 2 \leq j \leq n-1}} > \eta\, e^{-K p_o(Z_o)} .$$

(on fait un éventuel renumérotage des indices).

Grâce au théorème de Rouché (reposant sur l'utilisation de la formule de Kronecker), il existe un point Z'_o d'une composante irréductible de dimension 1 de la variété $\{P_1 = \ldots = P_{n-1} = 0\}$ tel que :

$$d(Z_o,Z'_o) < \eta_3 \, e^{-K_3 p_o(Z'_o)} .$$

Supposons que cette composante ait pour équations : $R_1 = R_2 = \ldots = R_\ell = 0$; si ce n'était pas V, la variété algébrique $\{P_1 = P_2 = \ldots = P_N = R_1 = \ldots = R_\ell = 0\}$ serait de dimension 0 ; or quitte à améliorer le choix de T :

$$(*) \quad \|Z_o\| > T \Rightarrow \sum_{q=1}^{N} |P_q(Z_o)| + \sum_{q'=1}^{\ell} |R_{q'}(Z_o)| > \eta \, e^{-K' p_o(Z_o)}$$

(théorème des zéros de Hilbert). En choisissant η_3 et C_3 correctement on voit qu'une telle inégalité (*) ne peut être satisfaite au point Z_o.

Nous pouvons donc supposer qu'il existe un point de V tel que :

$$d(Z_o,Z'_o) < \eta_3 \, e^{-K_3 p_o(Z'_o)} .$$

La composante connexe $\mathcal{C}$ entre dans $E_{Z'_o}(\eta_2,K_2)$; elle doit s'en échapper (à moins qu'elle ne soit incluse dans $E_{Z'_o}(\eta_2,K_2)$) ; or ceci est impossible en vertu de (c).

La composante connexe $\mathcal{C}$ est donc incluse dans $E_{Z'_o}(\eta_2,K_2)$; elle est bornée et incluse dans $B(Z_o, \varepsilon \, e^{-C_p(Z_o)})$. ∎

Nous allons montrer, à l'aide d'exemples (nous nous limiterons au cas où $n = 2$), comment la proposition 5.1 peut être utilisée pour trouver des conditions suffisantes pour qu'un couple (F_1,F_2) d'exponentielles-polynômes satisfasse à la condition FSD/p (ou FSD/p_o lorsque les fréquences sont imaginaires pures) ou pour qu'un système $\mu_1 * \check{f} = \mu_2 * \check{f} = 0$, $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$, où μ_1 et μ_2 sont deux distributions à support fini dans $\mathbb{R}^2$, satisfasse aux conditions de la synthèse spectrale.

Etant donné un couple (F_1,F_2) de $A_p(\mathbb{C}^2)$, nous pouvons définir la suite des Jacobiens itérés de F_1 et F_2, à savoir :

$(S)_{\vec{F}}$: $F_1, F_2, J(F_1,F_2)$, $J(F_1,J(F_1,F_2))$, $J(F_2,J(F_1,F_2))$, ... (voir [15]).

Supposons que F_1 et F_2 soient des transformées de Fourier de distributions à support fini dans $\mathbb{R}^2$, portées par un sous groupe $\Gamma = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}\alpha_m$ de $\mathbb{R}^2$.

Il existe une suite de polynômes (P_k) de $\mathbb{C}[X_1,X_2,T_1,\ldots,T_m]$ telle que : si Φ_k désigne le k ème élément de la suite $(S)_{\vec{F}}$, on ait : $\exists(\lambda_1^{(k)},\ldots,\lambda_M^{(k)}) \in \mathbb{R}^m$ tels que :

$$\forall Z \in \mathbb{C}^2 \quad , \quad \Phi_k(Z) = \exp\left[i \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{(k)} <\alpha_i,Z>\right] P_k\left(Z, e^{i<\alpha_1,Z>}, \ldots, e^{i<\alpha_m,Z>}\right)$$

La suite des polynômes (P_k) est parfaitement déterminée si l'on impose aux polynômes P_k d'être premiers avec $T_1,T_2,\ldots,T_m$, ce que l'on fera.

Proposition 5.2 : Soient ν_1 et ν_2 deux distributions à support fini dans $\mathbb{R}^2$; on suppose :

1) l'ensemble $\{\hat{\nu}_1 = \hat{\nu}_2 = 0\}$ est discret ;

2) il existe un polynôme Δ non identiquement nul de $\mathbb{C}[X,Y]$ et un entier r tels que :

$\exists(t_1,\ldots,t_M) \in \mathbb{C}^M$ tel que $P_i(Z,\vec{t}) = 0$, $i=1,\ldots,r \Rightarrow \Delta(Z) = 0$;

Le couple $(\hat{\nu}_1,\hat{\nu}_2)$ est alors FSD relativement au poids p_o.

Cela résulte immédiatement du théorème des zéros de Hilbert, de la proposition 5.1 et de la proposition 2 de [15]. ∎

Remarque 1 : il est très possible, même lorsque les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées pour le couple $(\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2)$ que l'élimination entre les polynômes P_k ne permette pas de trouver, dans l'idéal qu'ils engendrent dans $\mathbb{C}[X_1,X_2,T_1,\ldots,T_M]$, un élément non nul de $\mathbb{C}[X_1,X_2]$; (2) se trouve alors en défaut ;

C'est par exemple le cas du système :

$$a_1 + b_1 e^{-iz} + c_1 e^{-iw} + d_1 e^{-i(z+w)} = a_2 + b_2 e^{-iz} + c_2 e^{-iw} + d_2 e^{-i(z+w)}$$

où sont vérifiées pour les coefficients à la fois les conditions de Delsarte et la condition :

$$\left(\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right)^2 + 4 \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0$$

Remarque 2 : (2) est satisfaite sous certaines conditions d'indépendance entre les coefficients polynômiaux de $\hat{\mu}_1$ et de $\hat{\mu}_2$ et les coordonnées des points des supports de μ_1 et μ_2.

Dans le cas par exemple où $\hat{\mu}_1 = \sum_{i=1}^{3} A_i e^{i<\alpha_i, Z>}$, $\hat{\mu}_2 = \sum_{i=1}^{3} B_i e^{i<\alpha_i, Z>}$, (2) est vérifiée lorsque :

$$\sum_{j=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \begin{vmatrix} A_i & A_{i+1} \\ B_i & B_{i+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_j & A_{j+1} \\ B_j & B_{j+1} \end{vmatrix} \frac{J\left[A_{i+2} e^{-i<\alpha_{i+2}, Z>}, B_{j+2} e^{-i<\alpha_{j+2}, Z>} \right]}{e^{-i<\alpha_{i+2}+\alpha_{j+2}, Z>}} \neq 0$$

(convention : $4 = 1$, $5 = 2$).

Nous pouvons enfin rapprocher du corollaire 4.3 (corollaire du théorème 1) la proposition suivante :

Proposition 5.3 : Soient ν_1 et ν_2 deux distributions à support fini dans $\mathbb{R}^2$; on suppose que, pour tout couple (a_1, b_1) de points distincts du support de ν_1, pour tout couple (a_2, b_2) de points distincts du support de ν_2, on a $\overrightarrow{a_1 b_1}$ et $\overrightarrow{a_2 b_2}$ non colinéaires ;

on suppose que la condition (2) est satisfaite pour le couple $\left(\frac{\hat{\nu}_1}{D_1}, \frac{\hat{\nu}_2}{D_2} \right)$

où D_1 et D_2 sont les PGCD respectifs des coefficients polynomiaux de $\hat{\nu}_1$ et $\hat{\nu}_2$.

Alors les exponentielles polynômes solutions de $\nu_1 * \check{f} = \nu_2 * \check{f} = 0$ forment une partie totale dans l'espace des solutions C^∞ de ce système (pour la topologie de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$).

La démonstration tient au fait que sous les conditions de nature géométrique imposées aux supports de ν_1 et ν_2, aucune variété algébrique ne peut être incluse, lorsqu'elle est de dimension 1, dans l'ensemble $\frac{\hat{\nu}_1}{D_1} = \frac{\hat{\nu}_2}{D_2} = 0$; cela résulte de la preuve de la proposition 2.2.

Puisque (2) est satisfaite pour le couple $\left(\frac{\hat{\nu}_1}{D_1}, \frac{\hat{\nu}_2}{D_2}\right)$, le spectre d'un tel couple est donc discret et même FSD (proposition 5.2).

On utilise alors l'idée de la proposition 5.1 et la preuve du corollaire 4.3 pour ramener le problème à un problème discret. ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] Berenstein, C. and Dostal, M. ; Analytically Uniform Spaces and Their Applications to Convolution Equations, Lecture Notes in Math., Vol. 256, Springer-Verlag, New York, 1972.

[2] Berenstein, C. and Taylor, B.A. ; Interpolation Problems in $\mathbb{C}^n$ with Applications to Harmonic Analysis. Journal d'Analyse Mathématique, Vol. 38 (1980), p. 188 - 254.

[3] Chevalley, C. ; Intersection of Algebraic and Algebroid Varieties Trans. Amer. Math. Soc. 1945 (p. 1-85).

[4] Delsarte, J. ; Theorie des fonctions moyennes-périodiques de deux variables, Ann. of Math. 72 (1960), p. 121 - 178.

[5] Grudzinski, O.V. ; Einigele elementare Ungleichugen für Exponential polynome, Math. Ann. 221 (1976) p. 9-34.

[6] Gurevic, D.I. ; Closed Ideals with exp-polynomial generators in rings of entire functions of two variables, Izv. Akad. Nauk. Armjan SSR Ser Math 9(1974), 459-472, 510, Math Reviews 52, #785, Russian.

[7] Gunning, R.C. and Rossi, H. ; Analytic functions of several complex variables, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965.

[8] Ehrenpreis, L. ; Solution of some problems of division, Part IV ; Invertible and Elliptic operators, Amer. J. Math, Vol. 76 (1960), 522 - 588.

[9] Ehrenpreis, L. ; Fourier analysis in several complex variables, Wiley-Interscience, New York, 1970.

[10] Meyer, Y. ; Remarques sur un théorème de J. Delsarte, Annales de l'Institut Fourier Grenoble, 26 (1976), 133-152.

[11] Rudin, W. ; A géometric criterion for algebraic varieties, Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 17, n° 7, 1968, p. 671-683.

[12] Van Der Waeden, Modern Algebra, Vol. II, Ungar Publishing Co. 1950.

[13] Yger, A. ; Une généralisation d'un théorème de J. Delsarte, C.R.A.S. Paris, t. 288, Série A, p. 497-499.

[14] Yger, A. ; Fonctions définies dans le plan et vérifiant certaines propriétés de moyenne, à paraitre Annales de l'Institut Fourier, 31, 1981.

[15] Yger, A. ; Systèmes de distributions à support fini et à spectre discret, à paraitre C.R.A.S. Paris.

[16] Yger, A. ; Fonctions Moyennes-Périodiques de deux variables ; étude de systèmes d'équations de convolution envisagés par J. Delsarte. Publ. Centre de Mathématiques Ecole Polytechnique (1978).

[17] Hartshorne, R.; Algebraic Geometry, Springer-Verlag, New-York Inc. 1977.

APPENDICE I

Le théorème 1 du chapitre V, joint à une remarque due à N. Sibony, nous permet de démontrer les deux résultats suivants (des cas particuliers de ces résultats avaient été envisagés dans le § 4 du chapitre IV, ainsi qu'au § 5 du chapitre V).

Proposition 6.1 : Soient ν_1 et ν_2 deux distributions à support fini dans $\mathbb{R}^2$; on suppose que, pour tout couple (A_1, B_1) de points distincts du support de ν_1, pour tout couple (A_2, B_2) de points distincts du support de ν_2, les vecteurs $\vec{A_1B_1}$ et $\vec{A_2B_2}$ ne sont pas colinéaires. Alors les exponentielles-polynômes solutions de $\nu_1 * \check{f} = \nu_2 * \check{f} = 0$ forment une partie totale dans l'espace des solutions C^∞ de ce système (pour la topologie de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$).

Grâce à la proposition 4.1 du chapitre V, nous pouvons supposer qu'aucun des deux ensembles $(\operatorname{supp} \nu_j)_{j=1,2}$ n'est réduit à un seul point ; nous supposerons d'autre part que pour $j = 1,2$, les coefficients polynômiaux de $\hat{\nu}_j$ sont premiers entre eux ; si ce n'était pas le cas, un raisonnement analogue à celui du corollaire 4.3 du chapitre V nous permettrait de conclure ; sous ces dernières hypothèses, nous allons montrer que le couple $(\hat{\nu}_1, \hat{\nu}_2)$ est FSD relativement au poids $p_o(Z) = |\operatorname{Im} Z| + \operatorname{Log}(1+\|Z\|)$.

La proposition 6.1 est une conséquence immédiate du théorème 1 du chapitre V, du lemme 3.2 du chapitre IV et du résultat suivant, dont la preuve nous a été signalée par N. Sibony :

Lemme 6.1.1. : Soit X une sous variété analytique de $\mathbb{C}^2$; on suppose qu'il existe un ensemble E de $\mathbb{C}^*$ de mesure strictement positive tel que : $\forall u \in E$, $\exists\, T(u) > 0$ avec $X \cap \{Z \in \mathbb{C}^2,\ z + uw = 0\} \subset \{Z \in \mathbb{C}^2,\ \|Z\| < T(u)\}$. Toute composante de dimension 1 de la variété X est alors algébrique.

Ce lemme résulte par exemple du lemme 9 de [1] ou également

du théorème 3.1 de [2] ■

Soit Γ le sous groupe de $\mathbb{R}^2$ engendré par les points de $supp(\nu_1) \cup supp(\nu_2)$; soit χ un élément de $Hom(\Gamma,\mathbb{C}^*)$; nous allons montrer que le spectre de $(\chi\nu_1, \chi\nu_2)$ est discret.

Supposons donc que **X** soit une composante de dimension 1 de ce spectre ; aucune face du polygone convexe $\widehat{conv}\ (supp(\nu_1))$ n'est parallèle à une face du polygone convexe $\widehat{conv}\ (supp(\nu_2))$; il résulte alors des méthodes utilisées dans la preuve du lemme 2(I.A) que pour tout u dans $\mathbb{C}^* \setminus S$ (où S est un ensemble <u>fini</u> lié aux coefficients polynômiaux de $\hat{\nu}_1$ et $\tilde{\nu}_2$), il existe $C(u) > 0$ tel que $X \cap \{Z \in \mathbb{C}^2,\ z+uw = 0\} \subset \{Z \in \mathbb{C}^2,\ |\mathrm{Im}\ Z| \leq C(u)(1+\mathrm{Log}(1+\|Z\|))\}$; si l'on choisit u tel que $|u-i| < \eta$ (où η est assez petit) on voit que, pour un tel u, non élément de S, $X \cap \{Z \in \mathbb{C}^2, z+uw=0\} \subset \{Z \in \mathbb{C}^2, \|Z\| < T(u)\}$; d'après le lemme cité ci-dessus, **X** est une variété algébrique.

Mais alors, grâce au lemme 3.2 (chapitre IV), et à la géométrie des supports de ν_1 et ν_2 , il ne peut exister de variété algébrique de dimension 1 sur laquelle $\hat{\nu}_1$ et $\tilde{\nu}_2$ soient simultanément identiquement nulles.

Le spectre de $(\chi\nu_1, \chi\nu_2)$ est donc discret ; on est dans les hypothèses du théorème 1 du chapitre V ■

Signalons au passage le résultat suivant :

<u>Lemme 6.1.2</u> : <u>Soit</u> V <u>une variété analytique de</u> $\mathbb{C}^n$ <u>incluse dans une bande de</u> $\mathbb{C}^n$ <u>de la forme</u> $\{\|\mathrm{Im}\ Z\| \leq C\,(1+\mathrm{Log}(1+\|Z\|))\}$; V <u>est nécessairement une variété discrète.</u>

Soient $u_1,\ldots,u_{n-1}$ n-1 éléments de $\mathbb{C}^*$, de la forme $u_j = \alpha_j+i\beta_j$, avec $\beta_j > 0$, $j = 1,\ldots,n-1$.
Soit $(z_1,\ldots,z_n) \in V \cap \{Z \in \mathbb{C}^n,\ z_n = u_1 z_1^2 +\ldots+u_{n-1}z_{n-1}^2\}$; on a :

$$|\mathrm{Im}\ z_n| \geq \sum_{j=1}^{n-1} (\beta_j-|\alpha_j|)(\mathrm{Re}\ z_j)^2 - \sum_{j=1}^{n-1} (\beta_j+|\alpha_j|)\ (\mathrm{Im}\ z_j)^2 .$$

On voit donc que si $(u_1,\ldots,u_{n-1})$ est voisin de $(i,\ldots,i)$, il existe une constante T(u) telle que

$V \cap \{ Z \in \mathbb{C}^n,\ z_n = u_1 z_1^2 + \ldots + u_{n-1} z_{n-1}^2 \} \subset \{Z \in \mathbb{C}^n, \|Z\| \leq T(u)\}$. Il résulte alors du lemme 9 de [1] que toute sous variété analytique de $\mathbb{C}^n$ de dimension 1 incluse dans F(V) (où F désigne l'application propre de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$: $(z_1,\ldots,z_n) \to (z_1^2,\ldots,z_{n-1}^2,z_n)$) est algébrique ; toute sous variété analytique de $\mathbb{C}^n$ de dimension 1 incluse dans V l'est également ; or une variété algébrique de dimension 1 ne peut être incluse dans une bande de $\mathbb{C}^n$ de la forme $\{\|\text{Im } Z\| \leq C\,(1+\text{Log}(1+\|Z\|))\}$ ■

La proposition suivante est une conséquence de ce lemme :

Proposition 6.2 : Soit $\mathbb{P}$ un polygone convexe compact du plan affine non réduit à un segment ; on suppose $\mathbb{P} = A_1 A_2 \ldots A_n$ (par convention $A_{n+1}=A_1$) et que $0 \in \overset{o}{\mathbb{P}}$; soient μ_1 et μ_2 deux distributions de la forme :

$$\mu_1 = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta_{A_j} + \tau_1 \ , \quad \mu_2 = \sum_{j=1}^{n} b_j \delta_{A_j} + \tau_2 \ ,$$

où τ_1 et τ_2 sont deux distributions à support fini porté par l'intérieur de $\mathbb{P}$, et où les coefficients $(a_j,\ b_j)_{j=1}^{j=n}$ vérifient les conditions de Delsarte (D) $\bigwedge_{j=1}^{n} (a_j\, b_{j+1} - a_{j+1}\, b_j) \neq 0$.

Le couple $(\widehat{\mu_1},\ \widehat{\mu_2}$ est "slowly decreasing" au sens de Berenstein Taylor pour le poids p_o.

Soit Γ le sous groupe de $\mathbb{R}^2$ engendré par les points de $\text{supp}(\mu_1) \cup \text{supp}(\mu_2)$; soit χ un élément de Hom $(\Gamma, \mathbb{C}^*)$; comme dans la preuve du lemme 2(I.A), on voit :

$$\exists\ C(\chi) > 0,\ \forall\ Z \in \{(\chi\mu_1)\hat{}(Z) = (\chi\mu_2)\hat{}(Z) = 0\},\ \|\text{Im } Z\| \leq C(\chi)(1+\text{Log}(1+\|Z\|)).$$

Toute composante de dimension 1 du spectre de $(\chi\mu_1,\ \chi\mu_2)$ est donc algébrique (d'après le lemme 6.1.2), ce qui est absurde car une variété algébrique ne peut être incluse dans une bande de la forme $\{\|\text{Im } Z\| \leq C\ (1+\text{Log}(1+\|Z\|))\}$ à moins qu'elle ne soit de dimension 0. On utilise enfin le théorème 1 du chapitre V ■

[1] L. Gruman , La géométrie globale des ensembles analytiques de $\mathbb{C}^n$, Séminaire P. Lelong, H. Skoda 1978-1979, Lecture Notes 822, p. 90-99.

[2] R.E. Molzon, B. Shiffman, N. Sibony , Average growth for hyperplane sections of entire analytic sets, preprint.

APPENDICE II

Nous donnons dans cette annexe une application des résultats des chapitres IV et V du précédent travail à un problème plan que l'on pourrait rapprocher de ceux de Pompeiu ou de Morera.

Soit Σ le groupe des déplacements du plan affine ; une famille $\mathfrak{J} \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ possède la propriété de Pompeiu si :

$$\forall\, f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2),\ (\forall\, T \in \mathfrak{J},\ \forall\, \sigma \in \Sigma,\ T(f \circ \sigma) = 0) \Rightarrow (f \equiv 0) \qquad (1)$$

Une famille $\mathfrak{J} \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ possède la propriété de Morera si :

$$\forall\, f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2),\ (\forall\, T \in \mathfrak{J},\ \forall\, \sigma \in \Sigma,\ T(f \circ \sigma) = 0) \Rightarrow (\bar{\partial} f \equiv 0) \qquad (2)$$

Dans [1], L. Brown, B.M Schreiber, B.A Taylor, ont montré que si D est une région polygonale dans $\mathbb{R}^2$, de frontière Γ, la famille $\mathfrak{J} = \{\mu_D\}$, où μ_D désigne la mesure de surface sur D, possède la propriété de Pompeiu ; de même la famille $\mathfrak{J} = \{\nu_\Gamma\}$ où ν_Γ désigne la mesure $d\zeta$ sur $\Gamma = \partial D$, possède la propriété de Morera.

Comme le remarque L. Zalcman en conclusion de [3], il serait intéressant de voir si dans le cas où $\mathfrak{J} = \{\mu_D\}$, ou bien $\mathfrak{J} = \{\nu_\Gamma\}$ (D et Γ étant définis comme précédemment), (1) et (2) subsistent lorsque Σ se trouve remplacé par un ensemble de déplacements Σ' strictement plus petit que le groupe Σ tout entier. Nous démontrons ici le résultat suivant :

Proposition 6.3 : Soit Γ un polygone convexe $A_1 A_2 \ldots A_n$ non réduit à un segment du plan affine ; soit D la région polygonale compacte limitée par Γ ; il existe deux rotations τ_1 et τ_2 du plan telles que :

$$\forall\, f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2),\ \bar{\partial} f \equiv 0 \Leftrightarrow \nu_\Gamma * f \equiv \nu_{\tau_1(\Gamma)} * f \equiv \nu_{\tau_2(\Gamma)} * f \equiv 0.$$

Nous supposerons - ce qui n'est en rien restrictif - que $(0,0) \in \overset{\circ}{D}$. Un calcul immédiat nous montre l'existence de $n+1$ éléments de $\mathbb{C}[X,Y]$, $(\Delta_j^{(\Gamma)})_{j=0}^{j=n}$ tels que :

$$\begin{cases} \hat{\delta}_\Gamma \Delta_o^{(\Gamma)}(Z) = (iz-w) \sum_{j=1}^{n} \Delta_j^{(\Gamma)}(Z)\, \hat{\delta}_{A_j}(Z), \ Z \in \mathbb{C}^2 ; \\ \Delta_1^{(\Gamma)}, \ldots, \Delta_n^{(\Gamma)} \text{ premiers entre eux dans leur ensemble.} \end{cases}$$

Choisissons la rotation τ_1 de manière à ce qu'aucun côté ou aucune diagonale du polygone $\tau_1(\Gamma)$ ne soit parallèle à un côté ou à une diagonale du polygone Γ.

Grâce au théorème de Green, nous avons :

$$i\, \Delta_o^{(\Gamma)}(Z)\, \hat{\mu}_D(Z) = \sum_{j=1}^{n} \Delta_j^{(\Gamma)}(Z)\, \hat{\delta}_{A_j}(Z), \ Z \in \mathbb{C}^2 ;$$

nous avons également, pour une autre famille de polynômes $(\Delta_j^{\tau_1(\Gamma)})_{j=0}^{n}$:

$$\begin{cases} i\, \Delta_o^{(\tau_1(\Gamma))}(Z)\, \hat{\mu}_{\tau_1(D)}(Z) = \sum_{j=1}^{n} \Delta_j^{(\tau_1(\Gamma))}\, \hat{\delta}_{\tau_1(A_j)}(Z), \ Z \in \mathbb{C}^2 ; \\ \Delta_1^{\tau_1(\Gamma)}, \ldots, \Delta_n^{\tau_1(\Gamma)} \text{ premiers entre eux dans leur ensemble.} \end{cases}$$

Il résulte donc des résultats de l'appendice 1 du § V (il faut utiliser à la fois la démonstration de la proposition 6.1 et le théorème 1 du chapitre V ; on aura enfin recours au lemme 4.3.1) que pour un tel choix de τ_1, le couple $(\hat{\mu}_d, \hat{\mu}_{\tau_1(D)})$ est un couple d'éléments de $A_{p_o}(\mathbb{C}^2)$ "FSD" relativement au poids p_o (pour la définition de cette notion, cf §IV ; ici $p_o(Z) = \|\Im mZ\| + \mathrm{Log}(1+\|Z\|)$).

Cela implique en particulier que l'ensemble $\{\hat{\mu}_D = \hat{\mu}_{\tau_1(D)} = 0\}$ est un ensemble dénombrable de points de $\mathbb{C}^2$, que nous noterons $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(z_n, w_n)\}$.

Comme D est de mesure non nulle, tous les éléments (z_n, w_n) de E sont distincts de (0,0) ; d'autre part, la famille $\{\nu_\Gamma\}$ possédant la propriété de Morera ([1], théorème 5.9), il est impossible, lorsque $z_n^2 + w_n^2 \neq 0$, que la fonction f_n définie par $f_n(\theta) = \hat{\mu}_D(z_n\cos\theta + w_n\sin\theta, -z_n\sin\theta + w_n\cos\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, soit identiquement nulle sur $\mathbb{R}$; comme $\hat{\mu}_D(0,0) \neq 0$, il est également impossible, lorsque $z_n \neq 0$, que les fonctions g_n, h_n définies par

$g_n(\theta) = \hat{\mu}_D(z_n\, e^{i\theta},\ iz_n e^{i\theta})$, $h_n(\theta) = \hat{\mu}_D(z_n\, e^{-i\theta},\ -iz_n e^{-i\theta})$, $\theta \in \mathbb{R}$

soient, l'une ou l'autre, identiquement nulles sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de Baire nous assure l'existence de $\theta_o \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\, Z_n \in E$, $\hat{\mu}_D(z_n \cos\theta_o + w_n \sin\theta_o\ ,\ -z_n \sin\theta_o + w_n \cos\theta_o) \neq 0$; les fonctions de la forme f_n, g_n, h_n sont en effet des fonctions analytiques de θ identiquement nulles dés qu'elles le sont sur un ouvert de $\mathbb{R}$.

Soit τ_2 la rotation de $\mathbb{R}^2$ correspondant à θ_o. L'idéal fermé de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ engendré par $(\mu_D, \mu_{\tau_1(D)}, \mu_{\tau_2(D)})$ contient deux distributions (à savoir μ_D et $\mu_{\tau_1(D)}$) telles que le couple $(\hat{\mu}_D, \hat{\mu}_{\tau_1(D)})$ soit "slowly decreasing" au sens de Berenstein-Taylor relativement au poids p_o ; de plus $\{Z \in \mathbb{C}^2,\ \hat{\mu}_D(Z) = \hat{\mu}_{\tau_1(D)}(Z) = \hat{\mu}_{\tau_2(D)}(Z) = 0\} = \emptyset$. Nous pouvons utiliser le théorème 4.2 de [2] qui nous assure l'existence de trois suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ telles que :

$$\delta = \lim_{\substack{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2) \\ n \to \infty}} \left(u_n * \mu_D + v_n * \mu_{\tau_1(D)} + w_n * \mu_{\tau_2(D)}\right)$$

On a donc :

$$-i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} = \lim_{\substack{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2) \\ n \to \infty}} \left(\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{\partial}{\partial x}\right) * \left[u_n * \mu_D + v_n * \mu_{\tau_1(D)} + w_n * \mu_{\tau_2(D)}\right] ;$$

On a donc :

$$\forall\, f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2),\ \nu_\Gamma * f \equiv \nu_{\tau_1(\Gamma)} * f \equiv \nu_{\tau_2(\Gamma)} * f \equiv 0 \Rightarrow \bar{\partial} f \equiv 0$$

L'implication réciproque étant évidente, la proposition est démontrée ■

Références :

[1] Brown, L; Schreiber, Bertram M ; Taylor, B.A : Spectral Synthesis and the Pompeiu Problem, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 23, 3 (1973), 125-154.

[2] Gurevic, D.I. : closed ideals with the zero dimensional root set in certain rings of holomorphic functions, Journal of Soviet Math. 9, vol 2 (1978), 172-182.

[3] Zalcman, L : Analyticity and the Pompeiu Problem, Arch. Rational Mech. Anal. Vol 47 (1972), 237-254.